

# Задачі з комбінаторики

## Практичне заняття №2

### Правило додавання і правило множення комбінацій

Дані правила дуже нагадують алгебру подій. В лекційному матеріалі викладені Основні формули комбінаторики. Я повторю їх максимально коротко:

1) Знак «плюс» слід розуміти і читати як АБО. Згадаємо демонстраційну задачу з яблуком, грушею і бананом:

$$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7 \quad \text{способами можна обрати хоча б один фрукт.}$$

Тобто, можна взяти 1 фрукт (будь-який з трьох) **АБО** будь-яке поєднання двох фруктів АБО всі три фрукти. Зауважте, що додавання комбінацій передбачає байдужість вибору (не має різниці чи буде обраний один, два або три фрукти).

Розглянемо більш змістовний приклад:

#### Задача 1

Студентська група складається з 23 людей, серед яких 10 хлопців і 13 дівчат. Скількома способами можна обрати двох людей однієї статі?

**Рішення:** в даному випадку підрахунок  $C_{23}^2$  не підходить, тому, що загальна кількість поєднань вміщує і різностатеві пари.

Умова «обрати двох людей однієї статі» передбачає, що необхідно обрати двох хлопців **або** двох дівчат, і вже саме формулювання вказує на вірний шлях вирішення:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45 \quad \text{способами можна обрати 2 хлопців;}$$

$$C_{13}^2 = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13}{11! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78 \quad \text{способами можна обрати 2 дівчат.}$$

Таким чином, двох людей однієї статі (не має різниці – хлопців **або** дівчат) можна обрати:

$$C_{10}^2 + C_{13}^2 = 45 + 78 = 123 \quad \text{способами.}$$

**Відповідь:** 123

Правило множення комбінацій:

2) Знак «помножити» слід розуміти і читати як І.

Розглянемо ту ж саму студентську групу, яка пішла на танці. Скількома способами можна скласти пару з хлопця і дівчини?

$$C_{10}^1 = 10 \quad \text{способами можна обрати 1 хлопця;}$$

$$C_{13}^1 = 13 \quad \text{способами можна обрати 1 дівчину.}$$

Таким чином, одного хлопця і одну дівчину можна обрати:

$$C_{10}^1 \cdot C_{13}^1 = 10 \cdot 13 = 130 \quad \text{способами.}$$

Коли з кожної множини обирають по 1 об'єкту, то справедливий наступний принцип підрахунку комбінацій: «**кожен** об'єкт з однієї множини може скласти пару з кожним об'єктом іншої множини».

Тобто, Олег може запросити на танок будь-яку з 13 дівчат Євген – теж будь-яку з 13, і аналогічний вибір є у всіх інших хлопців. Отже:  $10 \cdot 13 = 130$  можливих пар.

Слід зазначити, що в даному прикладі не має значення «історія» створення пари; однак, якщо прийняти до уваги ініціативу, то кількість комбінацій необхідно подвоїти, тому, що кожна з 13 дівчат теж може запросити до танцю будь-якого хлопця. Все залежить від умови тієї чи іншої задачі!

Схожий принцип справедливий і для більш складних комбінацій, наприклад: скількома способами можна обрати двох хлопців і двох дівчат для участі в о скількома способами можна вибрати двох юношей и двох девушек для участя в одному епізоді КВК?

Союз І однозначно натякає на те, що комбінації необхідно перемножити:

$$C_{10}^2 \cdot C_{13}^2 = 45 \cdot 78 = 3510 \text{ можливих груп артистів.}$$

Іншими словами, **кожна** пара хлопців (45 унікальних пар) може виступати з **будь-якою** парою дівчат (78 унікальних пар). А якщо розглянути розподіл ролей між учасниками, то комбінацій буде ще більше. ...

Правило множення комбінацій розповсюджується і на більшу кількість множників:

### Задача 2

Скільки існує тризначних чисел, які діляться на 5?

**Рішення:** для наочності позначимо дане число трьома зірочками: \*\*\*

Комбінації будемо рахувати по розрядах – зліва направо:

В *розряд сотен* можна записати будь-яку з  $C_9^1 = 9$  цифр (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 або 9). Нуль не підходить, так як число перестає бути тризначним.

А ось в *розряд десятків* («посередині») можна вибрати будь-яку з 10 цифр:  $C_{10}^1 = 10$ .

За умовою, число повинно ділитися на 5, якщо воно закінчується на 5 або на 0. Таким чином, в молодшому розряді нас влаштовують 2 цифри.

**Отже, існує:**  $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2 = 9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$  тризначних чисел, що діляться на 5.

При цьому добуток  $C_9^1 \cdot C_{10}^1 \cdot 2$  розшифровується так: «9 способами можна вибрати цифру в *розряд сотен* і 10 способами вибрати цифру в *розряд десятків* і 2 способами в *розряд одиниць*»

Або ще простіше: «**кожна** з 9 цифр в *розряді сотен* комбінується з **кжною** з 10 цифр *розряду десятків* і з **кжною** з двох цифр в *розряді одиниць*».

**Відповідь:** 180

А тепер...

Да, згадаємо задачу з попереднього заняття, в якій Борі, Дімі і Володі можна здати по

одній карті  $C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840$  способами. Множення тут має той самий сенс:

$C_{36}^3 = 7140$  способами можна взяти 3 карти з колоди І в **кожній** вибірці представити їх  $P_3 = 3! = 6$  способами.

А тепер задача для самостійного рішення... сейчас придумаю что-нибудь поинтереснее, ...пусть будет про ту же русскую версию блэкджека:

Прийшов час закріпити матеріал, який пройшли парою солідних задач:

### Задача 3

У Васі вдома живуть 4 кота.

а) скількома способами можна розсадити котів по куткам кімнати?

б) скількома способами можна відпустити котів погуляти?

в) скількома способами Вася може взяти на руки двох котів (одного на ліву, іншого – на праву)?

**Вирішуємо:** по-перше, слід звернути увагу на те, що в задачі мова йде про **різні** об'єкти (навіть якщо коти – одно яйцеві близнюки). Це дуже важлива умова!

а) ~~Мовчання котів~~. Даній екзекуції піддаються відразу всі коти + важливе їх розташування, тому тут мають місце перестановки:

$P_4 = 4! = 24$  способами можна розсадити котів по кутках кімнати.

Ще раз повторюю, що при перестановках значення має лише кількість різних об'єктів і їх взаємне розташування. В залежності від настрою Вася може розсаджувати котів полу колом на дивані, в ряд на підвіконні т.д. – перестановок у всіх випадках буде 24. Бажаючи, для зручності, можуть уявити, що коти різнокольорові (наприклад, білий, чорний рудий і смугастий) і перерахувати всі можливі комбінації.

б) Скількома способами можна відпустити котів погуляти?

Передбачається, що коти ходять гуляти тільки через двері, при цьому не має значення кількість тварин – на прогулянку можуть вийти 1,2,3 і всі 4 коти.

Рахуємо можливі комбінації:

$C_4^1 = 4$  способами можна відпустити гуляти одного кота (будь-якого з чотирьох);

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = 6$$

способами можна відпустити гуляти двох котів (варіанти перерахуйте самостійно);

$C_4^3 = 4$  способами можна відпустити гуляти трьох котів (будь-який один з чотирьох сидить вдома);

$C_4^4 = 1$  способом можна випустити всіх котів.

Мабуть, ви здогадалися, що отримані значення слід скласти:

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$$

способами можна відпустити гуляти котів.

Ентузіастам пропоную ускладнену версію задачі – коли будь-який кіт в будь-якій вибірці випадковим чином може вийти на вулицю, як через двері, так і через вікно. Комбінацій значно збільшиться!

в) Скількома способами Вася може взяти на руки двох котів?

Ситуація передбачає не тільки вибір 2 тварин, але й їх розташування на руках:

$$A_4^2 = 3 \cdot 4 = 12$$

способами можна взяти на руки 2 котів.

Другий варіант вирішення:  $C_4^2 = 6$  способами можна вибрати двох котів і

$$P_2 = 2! = 2 \text{ способами посадити кожному перу на руки: } C_4^2 \cdot P_2 = 6 \cdot 2 = 12$$

**Відповідь:** а) 24, б) 15, в) 12

І для очищення совісті що-небудь конкретніше на множення комбінацій .... Нехай у Васі додатково живуть 5 кішок. Скількома способами можна відпустити погуляти 2 котів і 1 кішку?

$$C_4^2 \cdot C_5^1 = 6 \cdot 5 = 30$$

Тобто, з **кожною** парою котів можна відпустити **кожну** кішку.

Заключна тема присвячується комбінаціям, які зустрічаються теж досить часто, приблизно, в 20-30% комбінаторних задач:

## Перестановки, поєднання і розміщення з повтореннями

Перераховані види комбінацій є в вашому лекційному матеріалі, однак деякі з них при першому читанні можуть бути не дуже зрозумілими. В цьому випадку доречним буде спочатку ознайомитися з прикладами, і тільки потім приходити до розуміння загального формулювання. Поїхали:

### Перестановки повтореннями

В перестановках з повторенням, як і в «звичайних» перестановках приймає участь **одразу вся множина об'єктів**, але є одне але: в даній множині один або більша кількість елементів (об'єктів) повторюються. Зустрічайте ще один стандарт:

#### Задача 4

Скільки різних сполучень літер можна отримати перестановкою карток з наступними літерами: К, О, Л, О, К, О, Л, Б, Ч, И, К?

**Рішення:** в тому випадку, коли всі літери були б різними, то слід було б застосувати

банальну формулу  $P_n$ , однак зрозуміло, що для запропонованого набору карток деякі маніпуляції будуть спрацьовувати «вхолосту», так, наприклад, якщо поміняти місцями будь-які дві картки з літерами «К» в будь-якому слові, то отримаємо те ж саме слово. Причому, фізично картки можуть сильно відрізнятися одна від одної: одна може бути круглою з надрукованою літерою «К», інша – квадратна з намальованою літерою «К». Але в нашій задачі навіть такі картки **вважаються однаковими**, оскільки за умовою питають про сполучення літер.

Все дуже просто – всього: 11 карток, серед яких літера:

К – повторюється 3 рази;

О – повторюється 3 рази;

Л – повторюється 2 рази;

Б – повторюється 1 раз;

Ч – повторюється 1 раз;

И – повторюється 1 раз.

Перевірка:  $3 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 11$ , що потрібно було довести.

За формулою **кількості перестановок з повтореннями**:

$$P_{11(\text{поет})} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{39916800}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 554400$$

різних сполучень літер

можна отримати. Більше, ніж півмільйони!

На практиці вважається припустимим не записувати загальну формулу і, окрім того, опускають одиничні факторіали:

$$P_{11(\text{поет})} = \frac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{39916800}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 554400$$

Але попередні коментарі про повторювані літери обов'язкові!

**Відповідь:** 554400

#### Поєднання з повтореннями

Характерна особливість цього виду комбінацій полягає в тому, що вибірка проводиться з декількох груп, кожна з яких складається з однакових об'єктів.

#### Задача 5

В студентській столовій продають сосиски в тісті, ватрушки і пончики. Скількома способами можна купити 5 пиріжків?

**Рішення:** одразу зверніть увагу на типовий критерій поєднань з повтореннями – за умовою на вибір запропонована ні множина об'єктів як така, а **різні види** об'єктів; при цьому мається на увазі, що в продажу є не менше, ніж 5 хот-догів, 5 ватрушок і 5 пончиків. Пиріжки в кожній групі, зрозуміло, відрізняються – бо абсолютно ідентичні пончики можна змодельовати хіба, що на комп'ютері. Однак фізичні характеристики пиріжків за умовою задачі не суттєві, і хот-доги / ватрушки / пончики в своїх групах вважаються однаковими.

Що може бути у вибірці? По-перше, слід зазначити, що у вибірці обов'язково будуть однакові пиріжки (так як обираємо 5 штук, а на вибір запропоновано 3 види). Варіанти тут на будь-який смак: 5 хот-догів, 5 ватрушок, 5 пончиків, 3 хот-доги + 2 ватрушки, 1 хот-дог + 2 ватрушки + 2 пончики і т.д.

Як і при «звичайних» поєднаннях, порядок вибору і розміщення не мають значення – просто обрали 5 штук пиріжків і все.

Застосуємо формулу  $C_{n(m)}^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)! \cdot m!}$  кількості поєднань з повтореннями:

$$C_{3(пов)}^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2!} = 21$$

способом можна купити 5 пірижків.

### Відповідь: 21

Який висновок можна зробити з багатьох комбінаторних задач? Найскладніше – це розібратися в умові задачі.

З мого особистого досвіду, можу сказати, що поєднання з повтореннями – найбільш рідкісний гість на практиці, чого не скажеш про наступний вид комбінацій:

### Розміщення з повтореннями

З множини, що складається з  $n$  елементів, обираємо  $m$  елементів, при цьому важливий порядок елементів в кожній вибірці. І все було б нічого, але доволі несподіваний прикол полягає в тому, що будь-який об'єкт вхідної множини ми можемо обирати скільки завгодно разів. Коли так буває? Типовим прикладом є кодовий замок з декількома дисками, але в зв'язку з розвитком технологій актуальніше розглянути його цифрову реалізацію:

#### Задача 6

Скільки існує чотиризначних пін-кодів?

**Рішення:** насправді для розрулювання завдання достатньо знань правил комбінаторики:

$C_{10}^1 = 10$  способами можна вибрати першу цифру пін-коду і  $C_{10}^1 = 10$  способами – другу цифру пін-коду і стільки ж способів – третю і стільки ж – четверту. Таким чином, за правилом добутку комбінацій, чотиризначний пін-код можна скласти:

$$C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 \text{ способами.}$$

А тепер за допомогою формули. За умовою нам запропонований набір з  $n = 10$  цифр, з якого обирають  $m = 4$  цифри і розташовують їх в певному порядку, при цьому цифри у вибірці можуть повторюватися (*тобто будь-якою цифрою вхідного набору можна*

*користуватися довільну кількість разів*). За формулою  $A_{n(m)}^m = n^m$  кількості розміщень з повтореннями:  $A_{10(пов)}^4 = 10^4 = 10000$

**Відповідь:** 10000

Що спадає на думку... якщо банкомат «з'їдає» картку після третьої невдалої спроби вводу пін-коду, то шанси підібрати його мало ймовірні. І хто сказав, що в комбінаториці не має ніякого практичного сенсу.

Наше заняття добігло кінця, і наостанок я хочу сказати, що ви не марно витратили свій час – з тієї причини, що формули комбінаторики знаходять ще інше практичне застосування: вони зустрічаються в різних задачах з **теорії ймовірностей**, і в задачах на **класичне визначення ймовірності** – особливо часто.

### Домашнє завдання:

#### Задача 1

Скільки існує виграшних комбінацій з 2 карт при грі в «очко»?

Для тих, хто не знає: виграє комбінація 10 + ТУЗ (11 очок) = 21 очко і, давайте будемо вважати виграшною комбінацію з двох тузів.

(*порядок карт в будь-який парі не має значення*)

До речі, не треба вважати приклад примітивним. Блекджек – це мало не єдина гра, для якої існує математично обґрунтований алгоритм, який дозволяє вигравати у казино.

### Задача 2

В ліфт 12-поверхового дому сіли 3 пасажери. Кожний незалежно від інших з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому (починаючи з 2-го) поверху. Скількома способами:

- 1) пасажери можуть вийти на одному і тому самому поверсі (порядок виходу не має значення);
- 2) дві людини можуть вийти на одному поверсі, а третій - на другому;
- 3) люди можуть вийти на різних поверхах;
- 4) пасажери можуть вийти з ліфту?

І тут часто перепитують, поточною: якщо 2 або 3 людини виходять на одному поверсі, то порядок виходу значення не має. ДУМАЙТЕ, використовуйте формули і правила додавання/добутку комбінацій. У випадку складностей корисно надати пасажиром імена і поміркувати, в яких комбінаціях вони можуть вийти з ліфту. Не треба засмучуватися, якщо щось не виходить, так, наприклад, пункт № 2 достатньо коварний.

### Задача 3

Олексій займається спортом, причому 4 дні на тиждень – легкою атлетикою, 2 дні – силовими вправами і 1 день відпочиває. Скількома способами він може скласти собі графік занять на тиждень?

Формула тут не придатна, оскільки враховує перестановки, що співпадають (наприклад, коли міняються місцями силові вправи в середу з силовими вправами в четвер). І знову – по факту ті ж 2 силові тренування можуть сильно відрізнитися одне від іншого, але згідно умови задачі (з точки зору розкладу) вони вважаються однаковими елементами.

### Задача 4

В гаманці знаходиться досить велика кількість 1-, 2-, 5- і 10-копійчаних монет. Скількома способами можна дістати три монети з гаманця?

З метою самоконтролю дайте відповідь на пару простих запитань:

- 1) Чи можуть всі монети у вибірці бути різними?
- 2) Назвіть саму «дешеву» і саму «дорогу» комбінацію монет.

### Задача 5

Автомобільний номерний знак складається з 3 цифр і 3 літер. При цьому не допустимим є номер з трьома нулями, а літери обираються з набору А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (використовуються тільки ті літери кирилиці, написання яких збігається з латинськими літерами). Скільки різних номерних знаків можна скласти для регіонів?