

### Практичне заняття № 3. Комбінаторика і біном Ньютона

Нагадаю основні формули:

Кількість перестановок з  $n$  елементів знаходимо за формулою:

$$P_n = 1 \cdot 2 \dots (n-1) n = n! \quad (1.1.)$$

Кількість поєднань з  $n$  елементів по  $m$  знаходимо за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!}; \quad C_n^0 = 1. \quad (1.2)$$

Справедливими є наступні властивості поєднань:

$$\begin{aligned} C_n^m &= C_n^{n-m}; \\ C_n^m + C_n^{m+1} &= C_{n+1}^{m+1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Кількість розміщень з  $n$  елементів по  $m$  знаходимо за формулою:

$$A_n^m = P_m C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.4)$$

Формула бінома Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n, \quad (1.5)$$

$$(a+b)^n = a^n + n a^{n-1} b + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k + \dots + b^n, \quad (1.6)$$

або

де  $n$  – натуральне число і  $C_n^k a^{n-k} b^k = T_{k+1}$  є  $(k+1)$ -й член в розкладі біному ( $k=0, 1, 2, \dots, n$ ).

Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює:  $2^n$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n. \quad (1.7)$$

**Приклад 1.** Команда деякої ЕОМ записується у вигляді набору з восьми цифрових знаків – нулів і одиниць. Яка максимальна кількість різних команд?

**Рішення:** так як для кожного набору можливі лише два значення (0 або 1), то максимальна кількість різних команд є  $\underbrace{2 \cdot 2 \dots 2}_{8 \text{ раз}} = 256$ . Можна розмірковувати інакше.

Розглянути всі двійкові числа від  $00000000$  до  $11111111_2 = 255_{10}$ .

**Приклад 2.** В розкладі  $(1+x)^n$  четвертий член дорівнює 0,96. Знайти значення  $x$  і  $n$ , якщо сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 1024.

**Рішення:** так як сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює  $2^n$  а  $1024 = 2^{10}$ , то  $n=10$ .

Четвертий член розкладу  $T_4 = C_n^3 x^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 = 120x^3$ . Згідно з умовою,

$$120x^3 = 0,96; \quad \text{звідки } x^3 = 0,008, \quad \text{тобто } x = 0,2.$$

**Приклад 3.** При яких значеннях  $x$  і  $y$  можлива рівність  $C_y^x : C_{y+2}^x : A_y^x = 1 : 3 : 24$ ?

**Рішення:** Застосовуючи формули (1.2) і (1.4), маємо

$$\frac{y!}{x!(y-x)!} : \frac{(y+2)!}{x!(y-x+2)!} = \frac{1}{3}; C_y^x : (x! \cdot C_y^x) = 1 : 24.$$

З другого рівняння, отримаємо  $x! = 24$ , тобто  $x=4$ , оскільки  $(24=1*2*3*4)$ , а з першого

$$\frac{(y-x+1)(y-x+2)}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{3}.$$

рівняння знаходимо

Так як  $x=4$ , то  $y^2 - 9y + 8 = 0$ , звідки  $y=1$  і  $y=8$ .  $y=1$  не задовольняє умові  $(y > x=4)$ . Отже  $x=4$ ;  $y=8$ .

**Приклад 4.** Довести тотожність:  $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$

**Рішення:** Маємо  $P_{n-1} = (n-1)!$ ;  $P_{n-2} = (n-2)!$ . Таким чином

$$(n-1)((n-1)! + (n-2)!) = (n-1)(n-2)!(n-1+1) = n! = P_n.$$

**Приклад 5.** Довести тотожність:  $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$ .

**Рішення:** Ліва частина шуканої тотожності  $\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$ , а

права частина  $\frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{k!(m-k)!(n-m)!}$ . Отже тотожність доведено.

**Приклад 6.** При якому значенні  $x$  четвертий доданок розкладу  $(\sqrt{2^{x-1}} + \sqrt[3]{2^{-x}})^m$  В 20 разів більший за  $m$ , якщо біноміальний коефіцієнт 4-го доданку відноситься до біноміального коефіцієнту 2-го доданку, як 5:1?

**Рішення:** Біноміальні коефіцієнти 4-го і 2-го доданків дорівнюють відповідно  $C_m^3$  і  $m$ .

Отже,  $\frac{m(m-1)(m-2)}{3!m} = 5$ , або  $(m-1)(m-2) = 30$ , звідки  $m=7$ . Тоді 4-й доданок розкладу має

вигляд  $T_4 = C_7^3 2^{2(x-1)} \times \frac{1}{2^x}$  і приходимо до рівняння  $C_7^3 2^{x-2} = 140$ , звідки знаходимо

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} \cdot 2^{x-2} = 140; 2^{x-2} = 4; x=4.$$

$$\frac{A_{x+1}^{y+1} P_{x-y}}{P_{x-1}} = 72.$$

**Приклад 7.** Вирішити рівняння

**Рішення:** Маємо  $A_{x+1}^{y+1} = (x+1)! / (x-y)! \cdot P_{x-y} = (x-y)! \cdot P_{x-1} = (x-1)!$ , звідки  $\frac{(x+1)! (x-y)!}{(x-y)! (x-1)!} = 72$  або  $x(x+1) = 72$ , тобто  $x=8$ . Враховуючи, що  $x-y > 0$  і  $y$  – ціле число, отримуємо  $y=0, y=1, \dots, y=7$ .

$$\begin{cases} A_y^x \cdot P_{x-1} + C_y^{y-x} = 126, \\ P_{x+1} = 720; \end{cases}$$

**Приклад 8.** Вирішити систему рівнянь

**Рішення:** З другого рівняння маємо:  $(x+1)! = 720$ . Так як  $720 = 6!$ , то  $x=5$ . Враховуючи, що

$C_y^{y-x} = C_y^x$ , перепишемо перше рівняння таким чином:  $A_y^x \cdot P_4 + C_y^x = 126$ . Але  $A_y^x \cdot P_4 = 5 C_y^x$ , звідки  $6 C_y^x = 126$  або  $y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4) = 21 \cdot 120$ . далі маємо  $21 \cdot 120 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ , тобто  $y=7$ .

**Приклад 9.** Довести тотожність  $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1} \right) =$$

**Рішення:** Перетворимо ліву частину рівності

$$\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$$

Але  $C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$ , і тотожність доведено.

**Приклад 10.** Знайти найбільший біноміальний коефіцієнт розкладу  $\left(n + \frac{1}{n}\right)^n$ , якщо добуток 4-го від початку і 4-го з кінця доданків дорівнює 14400.

**Рішення:** Четвертий доданок спочатку має вигляд  $T_4 = C_n^3 n^{n-3} \frac{1}{n^3}$ , а 4-й доданок від кінця

– вид  $T_{n-2} = C_n^{n-3} n^3 \frac{1}{n-3}$ . Відповідно  $T_4 T_{n-2} = (C_n^3)^2 = 14\,400$ , звідки  $C_n^3 = 120$ . Далі маємо  $n(n-1)(n-2) = 720$ ;  $n(n-1)(n-2) = 10 \cdot 9 \cdot 8$ ;  $n=10$ . Отже, найбільший біноміальний коефіцієнт, що входить в доданок, однаково віддалений від кінців розкладу є  $C_{10}^5 = 252$ .

**Приклад 11.** Сума третього від початку і третього від кінця біноміальних членів розкладу  $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$  дорівнює 9900. Скільки раціональних членів містить цей розклад?

**Рішення:** Вказані в умові коефіцієнти дорівнюють  $C_n^2$ . Маємо  $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 9900$  або  $n(n-1) = 100 \cdot 99$ , звідки  $n=100$ . Тоді  $T_{k+1} = C_{100}^k 3^{(100-k)/4} 4^{k/3}$ ; згідно з умовою  $k/3$  і

$(100-k)/4$  - цілі числа, тобто  $k$  ділиться на 12. Для  $n=100$  таких чисел є  $\left[\frac{100}{12}\right] + 1 = 9$ .

Домашнє завдання:

$$\frac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720.$$

1. Вирішити рівняння

$$\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90, \\ A_x^y - 2C_x^y = 40. \end{cases}$$

2. Вирішити систему рівнянь:

$$\text{а) } C_{x+1}^y : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 2;$$

3. Знайти  $x$  і  $y$ , якщо б)  $C_x^{y-1} : (C_{x-1}^y + C_{x-2}^{y-2} + 2C_{x-2}^{y-1}) : C_x^{y+1} = 3 : 5 : 5$ .

4. Різниця між третім біноміальним членом розкладів  $(a+b)^{n+1}$  і  $(a+b)^n$

дорівнює 225. Знайти кількість раціональних членів розкладу  $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{y})^n$ .