

Задачі з комбінаторики. Приклади вирішення.

Практичне заняття №1

На даному занятті ми доторкнемося до елементів комбінаторики, які знадобляться для подальшого вивчення теорії ймовірностей. Слід зазначити, що комбінаторика є самостійним розділом вищої математики і з цієї дисципліни написано безліч підручників, зміст яких не легший за абстрактну алгебру. Отже нам вистачить невеликої частки теоретичного матеріалу.

Чим будемо займатися? У вузькому сенсі комбінаторика – це підрахунок будь-яких комбінацій, які можна скласти з деякої множини дискретних об'єктів. Під об'єктами розуміють будь-які окремі предмети або живі істоти – люди, звірі, гриби, рослини, комахи і т.д. При цьому комбінаторику зовсім не хвилює, що множина складається з тарілки манної каші, паяльника чи болотної жаби. Принципово важливим є одне – ці об'єкти піддаються лічбі – їх три (дискретність) і істотним є те, що серед них немає однакових.

З множиною розібралися, тепер про комбінації. Самими розповсюдженими видами комбінацій є перестановки об'єктів, їх вибірка з множини (поєднання) і розподіл (розміщення). Давайте зараз подивимось, як це відбувається:

Перестановки, поєднання і розміщення без повторень

Не треба лякатися малознайомих термінів, тим більше, що деякі з них не дуже вдалі. Почнемо з хвосту заголовка – що означає «без повторень»? Це означає, що на даному занятті будемо розглядати множини, які містять будь-які об'єкти. Уявіть, що перед вами на столі матеріалізувалися яблуко, груша і банан (при наявності такої ситуації можна і змодельовувати реально). Викладаємо фрукти зліва направо в такому порядку:

яблуко / груша / банан

Питання перше: скількома способами їх можна переставити?

Одна комбінація представлена вище і з іншими проблем не повинно виникнути:

яблуко / банан / груша

груша / яблуко / банан

груша / банан / яблуко

банан / яблуко / груша

банан / груша / яблуко

Разом: 6 комбінацій або 6 перестановок.

Добре, тут не важко перерахувати всі можливі випадки, але як бути, якщо предметів більше? Вже з чотирма різними фруктами кількість комбінацій значно зросте!

Будь-ласка, відкрийте лекційний матеріал «**Основні формули комбінаторики**» і знайдіть формулу кількості перестановок.

Ніяких мук – 3 об'єкти можна переставити $P_3 = 3! = 6$ способами.

Питання друге: скількома способами можна обрати а) один фрукт, б) два фрукти, в) три фрукти, г) хоча б один фрукт?

а) Один фрукт можна обрати, вочевидь, трьома способами – взяти або яблуко, або грушу, або банан. Формальний підрахунок проводиться за **формулою кількості поєднань**:

$$C_3^1 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$$

Запис C_3^1 в даному випадку слід розуміти так: «скільки способами можна обрати 1 фрукт з трьох?»

б) Перерахуємо всі можливі поєднання двох фруктів:

яблуко і груша;
яблуко і банан;
груша і банан.

Кількість комбінацій легко перевірити за тією ж формулою:

$$C_3^2 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

Запис C_3^2 розуміють аналогічно: «скількима способами можна обрати 2 фрукти з трьох?».
в) І, нарешті, три фрукти можна обрати лише одним способом:

$$C_3^3 = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1$$

До речі, формула кількості поєднань зберігає сенс і для порожньої вибірки:

$$C_3^0 = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$$

способом можна обрати жодного – власне, нічого не взяти і все

г) Скількима способами можна обрати **хоча б один** фрукт? Умова «хоча б один» має на увазі, що нас влаштує 1 фрукт (будь-який) або 2 будь-яких фрукта або 3 будь-яких фрукта:

$$C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 3 + 3 + 1 = 7$$

способами можна обрати хоча б один фрукт.

Питання третє: скількима способами можна роздати по одному фрукту Даші і Наташі?
Для того, щоб роздати два фрукти, їх треба спочатку обрати. Згідно з пунктом «б»

попереднього питання, зробити це можливо $C_3^2 = 3$ способами, перепишу їх знову:

Яблуко і груша;
яблуко і банан;
груша і банан.

Але комбінація зараз буде в два рази більшою. Розглянемо, наприклад, першу пару фруктів:

яблуком можна пригостити Дашу, а грушею - Наташу;

або навпаки – груша дістанеться Даші, а яблуко – Наташі.

І така перестановка можлива для кожної пари фруктів.

В даному випадку працює **формула кількості розміщень**:

$$A_3^2 = 2 \cdot 3 = 6$$

Вона відрізняється від формули C_3^2 тим, що враховує **не тільки** кількість способів, яким можна обрати декілька об'єктів, але й всі перестановки об'єктів в кожній можливій вибірці. Так, в розглянутому прикладі, важливо не тільки те, що можна просто обрати, наприклад, грушу і банан, але й те, як вони будуть розподілені (розміщені) між Дашею і Наташею.

Будь ласка, уважно прочитайте лекційний матеріал і добре уясніть для себе різницю між перестановками, поєднаннями і розміщеннями. В найпростіших випадках можна перерахувати всі можливі комбінації вручну, але частіше це стає невідомою задачею, саме для цього потрібно розуміти сенс формул.

Також нагадую, що зараз мова йде про множину з **різними** об'єктами, і якщо яблуко/грушу/банан замінити на 3 яблука або на 3 дуже схожих яблука, то в контексті розглянутої задачі вони все одно будуть вважатися **різними**.

Зупинимося на кожному виді комбінацій більш ретельно:

Перестановки

Перестановками називають комбінації, що складаються з одних тих самих ^н **різних** об'єктів, які відрізняються тільки порядком їх розташування. Кількість всіх можливих перестановок виражається формулою $P_n = n!$

Відмінною рисою перестановок є те, що в кожній з них приймає участь **ВСЯ** множина, тобто **всі** n об'єктів. Наприклад, дружня родина:

Задача 1

Скількома способами можна розсадити 5 людей за столом?

Рішення: використаємо формулу кількості перестановок:

$$P_5 = 5! = 120$$

Відповідь: 120 способами

Неймовірно, але факт. Зверніть увагу на те, якої форми стіл або взагалі всі люди сіли ~~ветали-полягали~~ на на лавку вздовж стіни – важлива лише кількість об'єктів і їх взаємне розташування.

Задача 2

Скільки чотиризначних чисел можна скласти з чотирьох карток з цифрами 0, 5, 7, 9?

Для того, щоб скласти чотиризначне число необхідно застосувати всі чотири картки

(цифри на яких **різні!**), і це дуже важливо усвідомити для застосування формули $P_n = n!$. Вочевидь, що, переставляючи картки, ми будемо отримувати різні чотиризначні числа, ... стоп, а тут все в порядку? ;-)

Добре подумайте над задачею! Взагалі, це характерна риса комбінаторних і ймовірнісних задач – в них НЕОБХІДНО ДУМАТИ. І часто думати по-життєвому, як, наприклад, у вступному прикладі з фруктами. Ні, звісно, я не пропоную тупо проробляти інші розділи математики, але й інтеграли можна навчитися вирішувати механічно.

Рішення: знайдемо кількість всіх можливих перестановок 4 карток:

Коли картка з нулем опиняється на 1-му місці, то число стає тризначним, тому дані комбінації слід виключити. Якщо нуль знаходиться на 1-му місці, тоді 3 цифри, що залишилися в молодших розрядах, можна переставити способами:

0579

0597

0759

0795

0957

0975

Примітка: так як карток небагато, то тут не складно перерахувати всі такі варіанти.

Таким чином, з запропонованого набору можна скласти:

$$24 - 6 = 18 \text{ чотиризначних чисел.}$$

Відповідь: 18

P.S. Ніколи не думала, що такі задачі будуть пропонувати для вирішення першокласникам і один з них помітив, що картку «9» можна використовувати як «6», і тому кількість комбінацій необхідно подвоїти. Але в умові все ж заявлена конкретна цифра і від подвоєння слід утриматись.

Поєднання

В підручниках надається лаконічне і не дуже зрозуміле визначення поєднання, тому моє формулювання буде не дуже раціональним, але, сподіваюсь, зрозумілою:

Поєднаннями називають різні комбінації з m об'єктів, які вибрані з множини n різних об'єктів, які відрізняються один від одного хоча б одним об'єктом. Іншими словами, окреме поєднання – це унікальна вибірка з m елементів, в якій не важливий їх порядок (розташування). Загальна ж кількість таких унікальних поєднань розраховується за

$$\text{формулою } C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}.$$

Задача 3

В ящику знаходиться 15 деталей. Скількома способами можна взяти 4 деталі?

Рішення: по-перше, знову звертаю увагу на те, що за логікою умови, деталі вважаються **різними** - снова обращаю внимание на то, что по логике условия, детали считаются **различными** – навіть якщо вони насправді однотипні і візуально однакові (в цьому випадку їх можна, наприклад, пронумерувати).

В задачі мова йде про вибірку з 4 деталей, в які не має значення їх «подальша доля» – грубо кажучи, «просто обрали 4 штуки і все». Таким чином, маємо поєднання деталей. Рахуємо їх кількість:

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{(15-4)! \cdot 4!} = \frac{15!}{11! \cdot 4!} = (*)$$

Тут, звісно ж, не треба обраховувати такі великі числа

$$11! = 39916800, \quad 15! = 1307674368000$$

В схожій ситуації я пропоную використовувати наступний прийом: в знаменнику обираємо найбільший **факторіал** в даному випадку $11!$ і скорочуємо на нього дріб. Для цього чисельник необхідно представити у вигляді $15! = 11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15$. Розпишу дуже ретельно:

$$(*) = \frac{11! \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{11! \cdot 4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{4!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{24} = 1365$$

способами можна взяти 4

деталі з ящику.

Ще раз: що це означає? Це означає, що з набору 15 різних деталей можна скласти *одну тисячу триста шістдесят п'ять* **унікальних** поєднань 4 деталей. Тобто, кожна така комбінація з чотирьох деталей буде відрізнятися від інших комбінацій хоча б однією деталлю.

Відповідь: 1365 способами

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Формули необхідно приділити особливу увагу, оскільки вона є «хітом» комбінаторики. При цьому корисно РОЗУМІТИ і без будь-яких обчислень записувати

«крайні» значення: $C_n^0 = 1$, $C_n^1 = n$, $C_n^{n-1} = n$, $C_n^n = 1$. Стосовно розібраної задачі:

$C_{15}^0 = 1$ – тільки одним способом можна не обрати жодної деталі;

$C_{15}^1 = 15$ способами можна взяти 1 деталь (будь-яку з п'ятнадцяти);

$C_{15}^{14} = 15$ способами можна взяти 14 деталей (при цьому якась одна з 15 залишиться в ящику);

$C_{15}^{15} = 1$ – тільки одним способом можна обрати всі п'ятнадцять деталей.

Рекомендую уважно ознайомитися з **біномом Ньютона і трикутником Паскаля**, по якому, до речі, дуже зручно виконувати перевірку обчислень C_n^m при невеликих значеннях «ен».

Задача 4

В шаховому турнірі приймає участь k людей і кожен з кожним грає тільки по одній партії. Скільки всього партій зіграно в турнірі?

Одразу ж зорієнтуємось за турнірною таблицею розміром $k \cdot k$ клітинок, в якій результат кожної партії враховується двічі і, окрім того, закреслюються клітинки «головної діагоналі» (так як учасники не грають самі з собою). Виходячи з приведених міркувань,

загальна кількість зіграних партій розраховується за формулою $n = \frac{k \cdot k - k}{2}$. Таке рішення цілком коректне, але коли один зі студентів помітив, що Однак один из посетителей сайта заметил, что насправді тут можна керуватися самими банальними поєднаннями:

$$C_k^2 = \frac{k!}{(k-2)! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-2)(k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-2) \cdot 2} = \frac{(k-1)k}{2}$$

різних пар можна скласти з k суперників (хто грає білими, хто чорними – не важливо).

Еквівалентною є задача про рукоштовання: у відділі працюють k чоловіків і кожен з кожним вітаються за руку, скільки рукоштовань вони здійснюють? Ну а висновків тут два:

- по-перше, не все очевидно – очевидно;
- і по-друге, не бійтеся вирішувати задачі «нестандартно»!

Розміщення (розташування)

Або «просунуті» поєднання. **Розміщеннями** називають будь-які комбінації з m об'єктів, які обрані з множини n будь-яких об'єктів, і які відрізняються один від іншого як складом об'єктів у вибірці, так і їх порядком. Кількість розміщень розраховується за формулою $A_n^m = (n - m + 1) \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$

Задача 5

Боря, Діма і Володя сіли грати в «очко». Скількома способами їм можна здати по одній карті? (в колоді міститься 36 карт)

Рішення: ситуація схожа з ситуацією з Задачі 4, але відрізняється тим, що тут важливим є не тільки те, які три карти будуть взяті з колоди, але й те, ЯК вони будуть розподілені між гравцями. За формулою розміщень:

$$A_{36}^3 = 34 \cdot 35 \cdot 36 = 42840$$

способами можна роздати 3 карти гравцям.

Є і інша схема вирішення, яка, з моєї точки зору, більш зрозуміла:

$$C_{36}^3 = \frac{36!}{33! \cdot 3!} = 7140$$

способами можна взяти 3 карти з колоди.

Тепер давайте розглянемо, яку небудь одну з семи тисяч ста сорока комбінацій, наприклад: король пік, 9 червей, 7 червей. Висловлюючись комбінаторною термінологією,

ці 3 карти можна «переставити» між Борею, Дімою і Володею $P_3 = 3! = 6$ способами:

КП, 9Ч, 7Ч;
 КП, 7Ч, 9Ч;
 9Ч, КП, 7Ч;
 9Ч, 7Ч, КП;
 7Ч, КП, 9Ч;
 7Ч, 9Ч, КП.

І аналогічний факт справедливий для **будь-якого** унікального набору з трьох карт. А

таких наборів, не забуваємо, ми нарахували $C_{36}^3 = 7140$. Не потрібно бути професором, щоб зрозуміти, що знайдену кількість поєднань слід помножити на шість:

$$C_{36}^3 \cdot P_3 = 7140 \cdot 6 = 42840$$

способами можна здати по одній карті трьом гравцям.

По суті, вийшла наочна перевірка **формули** $C_n^m \cdot P_m = A_n^m$, кінцевий сенс якої прояснимо на наступному занятті.

Відповідь: 42840

Можливо, у вас залишилося питання, а хто ж роздавав карти? ...Можливо, викладач. І щоб нікому не було сумно і образливо, у вирішальні наступних задач прийме участь вся група. Отже, **ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ**, яке необхідно надсилати на мою пошту o.serpinska@gmail.com до наступного заняття, тобто до 08.04.2020 року:

Задача 1

В студентській групі 23 студенти. Скількома способами можна обрати старосту і його заступника?

Задача 2

Скількома способами з колоди в 36 карт можна вибрати 3 карти?

Задача 3. У мамі 2 яблука і 3 груші. Кожен день протягом 5 днів підряд вона видає по одному фрукту. Скількома способами це можна зробити?

Задача 4. Підприємство може надати роботу за однією спеціальністю 4 жінкам, за іншою – 6 чоловікам, за третьою – 3 робітникам незалежно від статі. Скількома способами можна закрити вакансії, якщо є 14 претендентів: 6 жінок і 8 чоловіків?

Задача 5. В пасажирському потязі 9 вагонів. Скількома способами можна розсадити в потягу 4 людини, за умовою, що всі вони повинні їхати в окремих вагонах?

Задача 6. В групі 9 людей. Скільки можна скласти різних підгруп за умовою, що в підгрупу входить не менше, ніж 2 людини?