

Практична робота № 6

Тема: Мінімізація булевих функцій. Метод послідовного застосування законів та тотожностей алгебри логіки. Методи мінімізації булевих функцій: метод Куайна, метод Карнау-Вейча, метод Мак-Класкі і Куайна-Мак-Класкі.

Мета роботи: мета роботи полягає в відповіді на питання - як для довільної булевої функції побудувати мінімальну диз'юнктивну нормальну форму. Ця задача називається проблемою мінімізації булевих функцій.

1. Мінімізація мулевих функцій. Будь-яка булева функція може бути представлена диз'юнктивною нормальною формою. Слід зазначити, що диз'юнктивна нормальна форма часто може бути спрощена. При цьому шляхом різних тотожних перетворень отримаємо диз'юнктивну нормальну форму, еквівалентну вхідній, але таку, що містить меншу кількість входжень символів.

Диз'юнктивна нормальна форма називається **мінімальною**, якщо вона містить мінімальну кількість символів в порівнянні зі всіма іншими еквівалентними їй

диз'юнктивними нормальними формами. Зазначимо, що якщо деякий символ x_i зустрічається, наприклад, два рази, то при підрахунку кількості символів у формулі він враховується двічі. Для довільних функцій методів знаходження таких форм не існує, мінімізацію проводять тільки для ДНФ. Задачі знаходження мінімальної ДНФ носять назву мінімізації.

Для цього введемо деякі поняття.

Змінні $x_i (i = \overline{1, n})$ та $\overline{x_i} (i = \overline{1, n})$ досить часто називають **термами**. Повний набір із n термів утворює **конституанту**. У процесі мінімізації деякі терми із конституант пропадуть. Тоді частину, яка залишилась, називають **імплікантою**.

Імпліканту називають простою, якщо вона утворює кон'юнкцію змінних. Довільна кон'юнкція, отримана з імпліканти ви кресленням змінної, не є імпліканою.

Приклад 1. Розглянемо функцію $f(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ (штрих Шеффера). Таблиця 1 значень функції:

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	f
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Функції $g_1(x_1, x_2) = \overline{x_1}$ та $g_2(x_1, x_2) = \overline{x_2}$ імпліканти, бо g_1 і g_2 входять у f та $fg_1 = g_1, fg_2 = g_2$. Дійсно:

$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})x_1 = \overline{x_1} \vee \overline{x_1}x_2 = \overline{x_1}$$

$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2})x_2 = \overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_2 = \overline{x_2}$$

За основу розв'язання задач мінімізації довільних логічних функцій приймаємо схему, що містить три етапи:

- 1) На першому етапі складається таблиця істинності функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
- 2) На другому етапі виконується пошук простих імплікант f , тобто будується **скорочена** доскональна нормальна форма.

Скорочена ДНФ (англ. *reduced disjunctive normal form*) — форма запису функції, що має наступні властивості:

- будь-які два доданки розрізняються мінімум як в двох позиціях,
- жоден кон'юкт не міститься в іншому.

Наприклад: $(x \wedge y)$ міститься в $(x \wedge y \wedge z)$. Функцію можна записати за допомогою скороченої ДНФ не єдиним способом. Запишемо функцію (x, y, z) у вигляді доскональної ДНФ: $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z)$. Відомо, що цей вираз еквівалентний наступному:

$((x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)) \vee ((x \wedge \neg y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z)) \vee ((\neg x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z))$. Винесемо в кожній дужці спільний кон'юкт (наприклад, в першій $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z) = (x \wedge y) \vee (z \wedge \neg z)$). Так як $z \wedge \neg z = 0$, то такий кон'юкт не впливає на значення виразу, і його можна опустити. Отримаємо в підсумку формулу $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$;

3) на третьому етапі проводиться побудова **тупикових** (без зайвих імплікант) досконалих нормальних форм, з числа яких вибирають **мінімальні** доскональні нормальні форми.

Навіть, якщо ДНФ скорочена, її можна мінімізувати, тобто зменшити кількість елементарних кон'юнкцій, що входять до неї.

Приклад 2. Нехай скорочена ДНФ функції має вигляд:

$$f(x, y, z) = xy \vee \bar{y}z \vee xz$$

Тоді її одинична множина може бути представлена у вигляді:

$$M_f = M_{xy} \vee M_{\bar{y}z} \vee M_{xz} = \{110, 111\} \vee \{001, 101\} \vee \{101, 111\}$$

Зазначимо, що набори, що входять до останньої підмножини, знаходяться також і в першому і в другому. Так $101 \in M_{\bar{y}z}$ (говорять, **набір 101 покривається множиною $M_{\bar{y}z}$**), а $111 \in M_{xy}$. Значить, якщо прибрати складову M_{xz} , функція від цього не зміниться. Говорять, що **множина M_{xz} покривається об'єднанням M_{xy} і $M_{\bar{y}z}$** . Отже, **імпліканта xz – зайва**.

Скорочена ДНФ, з якої видалені всі зайві імпліканти, називається **тупиковою**.

Для розв'язання задач мінімізації на другому етапі застосовують методи законів та тотожностей алгебри логіки, метод Куайна, метод Мак-Класкі, метод Карнау-Вейча, метод Куайна-Мак-Класкі і інші. Основним методом для проведення третього етапу є метод імплікантної таблиці логічних функцій (метод Куайна).

Розглянемо дані методи.

2. Метод послідовного застосування законів і тотожностей алгебри логіки.

В основі даного методу лежить пошук виразів, які можна записати у більш простому вигляді. При цьому, як правило, найбільше використовуються такі операції та закони логіки:

$$\overline{x_1 x_2} \vee x_1 x_2 = x_1 (\overline{x_2} \vee x_2) = x_1 - \text{операція склеювання};$$

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1 (1 \vee x_2) = x_1 - \text{операція поглинання};$$

$$\overline{x_1} \vee x_1 x_2 = (\overline{x_1} \vee x_1) (\overline{x_1} \vee x_2) = \overline{x_1} \vee x_2 - \text{дистрибутивний закон};$$

$x \vee x = x$ - ідемпотентність, з цього закону випливає, що кожний доданок в ДНФ можна групувати з іншими не одноразово.

Методом користуються лише в досить простих випадках, він носить елементи довільних розв'язків і є дуже громіздким. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Мінімізувати булеву функцію

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1(x_2x_3 \vee x_4)}(x_1x_2x_3 \vee x_4) \cdot (\overline{x_1x_2x_3x_4} \vee \overline{x_1x_2x_3} \vee \overline{x_1})$$

Розв'язання: Скористуємося законом де Моргана та дистрибутивним законом.

$$\begin{aligned} f &= \overline{x_1((x_2x_3 \vee x_4) \vee (x_1x_2x_3 \vee x_4))} \cdot (\overline{x_1x_2x_3x_4} \vee \overline{x_1x_2x_3x_4} \vee \overline{x_1x_2x_3} \vee \overline{x_1}) = \\ &= \overline{x_1((x_2x_3 \vee x_4) \vee (x_1x_2x_3 \vee x_4))} (x_2x_3x_4 \vee x_2x_3 \vee 1) = \overline{x_1(x_2x_3 \vee x_4 \vee x_1x_2x_3 \vee x_4)} \cdot \\ &\cdot (x_2x_3x_4 \vee x_2x_3 \vee 1) \end{aligned}$$

Застосуємо дистрибутивний закон та закон поглинання.

$$f = \overline{x_1(x_2x_3(1 \vee x_1) \vee x_4)} = \overline{x_1(x_2x_3 \vee x_4)}.$$

3. Метод Куайна.

За методом Куайна прості імпліканти знаходяться по доскональній диз'юнктивній нормальній формі (ДДНФ) мулевої функції в результаті застосування до неї закону неповного склеювання та операції поглинання. Продемонструємо дію методу на прикладі.

Приклад 4. Мінімізувати булеву функцію, що задана таблицею.

a	b	c	d	f	Запишемо ДДНФ: Застосуємо операцію		
0	0	0	0	1	склеювання конститuent:		
0	0	0	1	0	\overline{abcd}	\overline{abd}	\overline{ad}
0	0	1	0	1	\overline{abcd}	\overline{acd}	\overline{ad}
0	0	1	1	0	\overline{abcd}	\overline{acd}	
0	1	0	0	1	\overline{abcd}	\overline{acd}	
0	1	0	1	0	\overline{abcd}	\overline{abd}	
0	1	1	0	1	\overline{abcd}	bcd	
0	1	1	1	1	\overline{abcd}	\overline{abc}	
1	0	0	0	0	\overline{abcd}	bcd	
1	0	0	1	1	\overline{abcd}		
1	0	1	0	0	\overline{abcd}		
1	0	1	1	0			
1	1	0	0	1			
1	1	0	1	0			
1	1	1	0	0			
1	1	1	1	1			

Склеюємо попарно ті конституанти, що відрізняються одним термом. В даному випадку: 1 і 2 конституенти, потім 1 і 3, потім 2 і 4 і т.д. Після першого етапу склеювання повинні залишитися імпліканти, що містять вже 3 терми, замість 4. На другому етапі знову проводимо попарно операцію склеювання так, щоб в імплікантах залишилося по 2 терми. На четвертому етапі застосуємо операцію поглинання: $BC \vee C = C$. Тобто, викреслюємо всі імпліканти, що містять \overline{ad} . Записавши імпліканти, що залишилися не викресленими, отримаємо скорочену диз'юнктивну нормальну форму. СДНФ не є останньою стелінню спрощення.

Складаємо таблицю Куайна, в якій помістимо отримані спрощення імпліканти та вихідні конституенти. В стовпчиках записуємо конституанти, в рядках – отримані імпліканти. Одиницю ставимо там, де імпліканта «покриває» конституанту, це тому, що конституанта може бути замінена імплікантою за законом поглинання.

	$\overline{a}bcd$	$a\overline{b}cd$	$ab\overline{c}d$	$abcd$	$\overline{a}bc\overline{d}$	$a\overline{b}c\overline{d}$	$ab\overline{c}\overline{d}$	$abcd$
$\overline{a}bcd$						1		
$b\overline{c}d$			1				1	
$\overline{a}bc\overline{d}$				1	1			
bcd					1			1
$\overline{a}d$	1	1	1	1				

Шукаємо ті стовпчики, де є тільки одна одиниця. Це стовпчики 1,2, 6,7 і 8. Ці стовпчики відповідають імплікантам $\overline{a}bcd$, $b\overline{c}d$, bcd і $\overline{a}d$. Ці імпліканти складають **ядро** і їх вилучати в жодному разі не можна. Тепер подивимось, чи можемо ми виключити імпліканту $\overline{a}bc\overline{d}$. Одиниця, що стоїть в четвертому стовпчику навпроти імпліканти $\overline{a}bc\overline{d}$ покривається одиницею, що стоїть в тому ж стовпчику навпроти імпліканти $\overline{a}d$, а одиницю, що стоїть в п'ятому стовпчику навпроти $\overline{a}bc\overline{d}$ покриває одиниця, що стоїть в тому ж стовпчику навпроти bcd . Отже обидві ці одиниці покриваються іншими одиницями. Робимо висновок, імпліканту $\overline{a}bc\overline{d}$ можна виключити. Отже, мінімальна ДНФ має наступний вигляд: $МДНФ = \overline{a}bcd \vee b\overline{c}d \vee bcd \vee \overline{a}d$. Ця МДНФ складається лише з імплікант ядра, але це не завжди так. Бувають випадки, коли спочатку з таблиці Куайна отримуємо **тупикові** ДНФ, з яких потім обираємо мінімальну ДНФ. Тупикова ДНФ складається з ядра і деяких імплікант.

3. Метод Карнау-Вейча. Якщо число змінних логічних функцій мале ($n \leq 4$), знаходження мінімальних форм можна проводити за допомогою спеціальних таблиць, які називаються діаграмами Вейча або картами Карнау. Нехай $n=4$, тобто $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Карта Карнау для чотирьох змінних являє собою квадрат, що розбитий на 16 малих квадратів (4x4). Складемо карту Карнау. Для змінних x_1 і x_2 відведемо вертикальну сторону карти, а для x_3 , x_4 - горизонтальну.

Зміст карти в тому, що функція задається таблицею, але не в стовпчиках, як завжди, а на площині у вигляді 16 квадратів. Набори змінних використовуються в порядку, так званого коду Грея (00), (01), (11), (10). На карті Карнау сусідні набори відмінні лише однією координатою від сусіднього по розміщенню. Значення функції записують в малих квадратах. По таблиці Карнау з'ясовують, які квадрати карти можна закріпити тією чи іншою імплікантою., якщо два сусідні рядки, чи два сусідні стовпчики заповнені одиницями, то їх можна покрити однотермовою імплікантою, тобто якби в перших двох рядках всюди були одиниці, то: $f = \overline{x_1} \vee \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Зауважимо, що карту Карнау треба уявляти так, що вона відтворена не на площині, а на поверхні, що має форму Тора, в якому сусідніми будуть перший та останній рядки, перший та останній стовпчики. Тобто можна стверджувати, що однобуквеним імплікантам відповідають або два сусідні рядки або два сусідні стовпчики.

Двотермові імпліканти розглядають так: $x_1x_2 = 1$ відповідає третій рядок. Аналогічно знаходяться три термові і чотири термові імпліканти. Тобто за допомогою карти Карнау графічно виконуються операції склеювання, поглинання, об'єднання одиниць та груп одиниць між собою. Продемонструємо метод Карнау_Вейча на прикладі.

Приклад 5. Нехай функція $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана таблицею

x_3, x_4		00	01	11	10
x_1, x_2	00	1 e	1 a	1 b	1 f
	01	0	1 c	1 d	0
	11	0	0	1 i	1 j
	10	1 g	1 k	0	0

Розв'язання. Проаналізуємо дану таблицю істинності і позначимо квадрати, що вміщують одиниці літерами.

З таблиці видно, що одно термові імпліканти відсутні, бо не має двох сусідніх стовпчиків або рядків, що вміщують лише одиниці.

Будемо шукати двотермові імпліканти, тобто чотири квадрати з одиницями, що витягнуті в одну лінію або складені у великий квадрат. Бачимо, що перший рядок (квадрати e, a, b, f) – утворює лінію, що покривається $\overline{x_1}$ та $\overline{x_2}$, отже отримано імпліканту $\overline{x_1 x_2}$.

Квадрат abcd, що складається з одиниць повністю покривається імплікантою $\overline{x_1 x_4}$.

Квадрат eagk покривається імплікантою $\overline{x_2 x_3}$ (квадрат утворено замкненням карти до утворення тору). Більше квадратів утворити не можна, тобто

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_4} \vee \overline{x_2 x_3} \vee \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

В таблиці непокритими залишилися дві одиниці (квадрати i та j). Покрити їх неможливо, тобто необхідно витратити на них тритермову імпліканту $x_1 x_2 x_3$.

Всі одиниці покриті імплікантами, за методом Карнау-Вейча МДНФ має вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_2} \vee \overline{x_1 x_4} \vee \overline{x_2 x_3} \vee x_1 x_2 x_3.$$

4. Метод Мак-Класкі. Метод застосовують тоді, коли булева функція задана нормальною формою.

Алгоритм методу використовує наступні етапи:

1. Кожній конституанті присвоюється індекс – число одиниць термів і номер – відповідне число в десятковій системі числення.

Наприклад, $x_4 x_3 x_2 \overline{x_1}$ - (1110)=14, індекс – 3(кількість одиниць), номер – 14

Тут: x_4 - 1000=8;

x_3 - 0100=4;

x_2 - 0010=2;

x_1 - 0001=1.

Отримані результати заносяться в таблицю, в першому рядку якої записують індекси, а в другому – номери конституант.

2. Виконується склеювання за правилом: нехай i -індекс, j – індекс, $j > i$. Склеюються ті конституанти, різниця між m_i та n_j є степенем двійки, тобто $n_j - m_i = 2^n; n = 0; 1; 2; 4; \dots$

При склеюванні справа вказується величина різниці. Склеювання продовжується доти, доки воно можливе (різниці степені-двійки). Алгоритм методу розглянемо на прикладі.

Приклад 6. Методом Мак-Класкі мінімізувати булеву функцію, нормальна форма якої

$$f = \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \vee \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \vee \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \vee \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \vee \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \vee \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \vee \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} \vee \overline{x_4 x_3 x_2 x_1}$$

Рішення. Запишемо всі конституанти через індекси та присвоєні номери (десятькове числення).

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (1110)_{(3)} = 14;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (1101)_{(3)} = 13;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (1011)_{(3)} = 11;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (0111)_{(3)} = 7;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (1100)_{(2)} = 12;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (1110)_{(3)} = 14;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (1001)_{(2)} = 9;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (1111)_{(4)} = 15;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (0011)_{(2)} = 3;$$

$$\overline{x_4 x_3 x_2 x_1} - (0000)_{(0)} = 0. \text{ Отримані результати занесемо в таблицю:}$$

Індекс	0	1	2	3	4
Номер	0*	-	3;9;12	7;11;13;14	15

Враховуючи, що склеювати можна лише сусідні індекси, бачимо:

1) конституанту індексом 0 склеїти ні з якою не можна, бо немає конституант з індексом 1;

2) процес склеювання ($j > i; n_j - m_i = 2^n; n = 0; 1; 2; 4; \dots$) 1 група: (3;7) – (4); (3;11) – (8); (9;11) – (2); (9;13) – (4); (12;13) – (1); (12;14) – (2). (Склеювання конституант з індексом 2 і 3) 2 група: (7;15) – (8); (11;15) – (4); (13;15) – (2); (14;15) – (1). (Склеювання конституант з індексом 3 і 4). Знову проведемо склеювання між 1 і 2 групами, у яких різниці однакові; $j > i$: (12;13;14;15) – (1;2); (9;11;13;15) – (2;4); (12;13;14;15) – (1;2); (3;7;11;15) – (4;8); (9;11;13;15) – (2;4); (3;7;11;15) – (4;8).

$$(12;13;14;15) - (1;2);$$

$$(9;11;13;15) - (2;4);$$

$$(3;7;11;15) - (4;8).$$

Процес склеювання закінчено. Отримані результати запишемо у вигляді конституант (ліва дужка), права дужка вказує на терми, які треба виключити з конституант, що залишилися.

$$(12;13;14;15) - (1;2)$$

$$12 = 1100 - \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} = x_4 x_3$$

$$13 = 1101 - \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} = x_4 x_3$$

$$14 = 1110 - \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} = x_4 x_3$$

$$15 = 1111 - \overline{x_4 x_3 x_2 x_1} = x_4 x_3$$

$x_4 x_3$

(9;11;13;15) – (2;4)

$$\begin{aligned} 9 &= 1001 - \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} x_1 = x_4 x_1 \\ 11 &= 1011 - \overline{x_4} \overline{x_3} x_2 x_1 = x_4 x_1 \\ 13 &= 1101 - \overline{x_4} x_3 \overline{x_2} x_1 = x_4 x_1 \\ 15 &= 1111 - \overline{x_4} x_3 x_2 x_1 = x_4 x_1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 9 \\ 11 \\ 13 \\ 15 \end{aligned}} \right\} x_4 x_1$$

(3;7;11;15) – (4;8)

$$\begin{aligned} 3 &= 0011 - \overline{x_4} \overline{x_3} x_2 x_1 = x_2 x_1 \\ 7 &= 0111 - \overline{x_4} x_3 x_2 x_1 = x_2 x_1 \\ 11 &= 1011 - \overline{x_4} \overline{x_3} x_2 x_1 = x_2 x_1 \\ 15 &= 1111 - \overline{x_4} x_3 x_2 x_1 = x_2 x_1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 3 \\ 7 \\ 11 \\ 15 \end{aligned}} \right\} x_2 x_1$$

Таким чином, мінімальна нормальна форма, отримана за методом Мак-Класкі для функції має вигляд: $f = x_4 x_3 x_2 x_1 \vee x_4 x_3 \vee x_4 x_1 \vee x_2 x_1$.

Домашнє завдання:

1. По приведеній таблиці істинності знайти логічну функцію та спростити її.

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

2. Мінімізувати булеву функцію

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_2} x_1 \vee \overline{x_4} \overline{x_3} x_2 x_1 \vee \overline{x_4} x_3 \overline{x_2} x_1 \vee \overline{x_4} x_3 x_2 x_1 \vee \overline{x_4} \overline{x_3} x_2 x_1 \vee \\ &\vee \overline{x_4} x_3 \overline{x_2} x_1 \vee \overline{x_4} x_3 x_2 x_1 \vee \overline{x_4} x_3 x_2 x_1 = f(0010; 0101; 0110; 0111; 1010; 1100; 1101; 1110) \end{aligned}$$

3. Мінімізувати функцію $f = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \overline{w} \vee \overline{x} \overline{y} z \overline{w} \vee \overline{x} y \overline{z} \overline{w} \vee \overline{x} y z \overline{w} \vee \overline{x} \overline{y} z w \vee \overline{x} y z w \vee x y z w \vee x y z \overline{w}$ методом Карнау-Вейча.

4. Мінімізувати функцію, що задана таблицею, методом Мак-Класкі:

x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1