

Практична робота № 5

Тема: Алгебра Жегалкіна. Лінійні функції. Монотонні функції. Класи булевих функцій. Поліном Жегалкіна. Способи побудови полінома Жегалкіна. Класи булевих функцій. Теорема Поста. Дослідження системи булевих функцій на повноту.

Мета роботи: знати основні закони алгебри Жегалкіна, вміти доводити монотонність, лінійність і само двоїстість мулевих функцій, вміти будувати поліном Жегалкіна способом невизначених коефіцієнтів і за допомогою трикутника Паскаля, вміти визначати класи мулевих функцій і досліджувати системи мулевих функцій на повноту за теоремою Поста.

1.1 Алгебра Жегалкіна. Алгебра, що утворена множиною $B\{0,1\}$ разом з операціями \wedge (кон'юнкція), \oplus (сума за модулем 2) і константами 0 і 1, називається алгеброю Жегалкіна: $(B; \wedge; \oplus; 0; 1)$. В алгебрі Жегалкіна операція \wedge повністю ідентична множенню, а операція \oplus зображує додавання за модулем 2 для скінчених множин.

Властивості операції кон'юнкції.

$(x_1 \wedge x_2) \wedge x_3 = x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3)$ - асоціативність;

$x_1 \wedge x_2 = x_2 \wedge x_1$ - комутативність;

$x_1 \wedge 0 = 0; x_1 \wedge 1 = x_1$ - дії з константами;

$x \wedge x = x$ - ідемпотентність.

Властивості операції сума за модулем 2.

$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ - комутативність;

$x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3) = (x_1 \oplus x_2) \oplus x_3$ - асоціативність;

$x \oplus x = 0$ - закон зведення подібних доданків;

$x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3) = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3$ - дистрибутивність кон'юнкції відносно \oplus .

Решта операцій алгебри логіки виражаються через базис цієї алгебри в такий спосіб:

$\bar{x} = 1 \oplus x;$

$x_1 + x_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2;$

$x_1 \rightarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2;$

$x_1 \downarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2;$

$x_1 \approx x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2;$

$x_1 \leftarrow x_2 = x_1 \oplus x_1 x_2;$

$x_1 | x_2 = 1 \oplus x_1 x_2;$

1.2. Поліном Жегалкіна. Будь-яку булеву функцію можна представити у вигляді полінома Жегалкіна, причому єдиним чином.

Визначення. Поліном Жегалкіна — довільна формула [алгебри Жегалкіна](#), яка має вигляд суми [кон'юнкцій](#) булевих змінних. В зарубіжній літературі представлення полінома Жегалкіна зазвичай називається алгебраїчною нормальною формою (АНФ).

Теорема Жегалкіна — стверджує існування і унікальність будь-якої булевої функції у вигляді поліному Жегалкіна. Формально поліном Жегалкіна можна представити у вигляді:

$$P(x_1, \dots, x_n) = a \oplus a_1 \wedge x_1 \oplus a_2 \wedge x_2 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} \wedge x_1 \wedge x_2 \oplus a_{13} \wedge x_1 \wedge x_3 \oplus \dots \oplus a_{1\dots n} \wedge x_1 \dots \wedge x_n$$

Частіше за все для побудови полінома Жегалкіна застосовують два методи побудови таких поліномів: метод невизначених коефіцієнтів і метод еквівалентних перетворень. Розрахунки за допомогою цих методів часто є громіздкими і завдяки неухважності легко припуститися помилки. Але існує ще один метод побудови поліному Жегалкіна, який студенти

сприймають на «ура», так як він потребує лише «механічних дій» без застосування будь-яких розумових зусиль. Цей метод відомий як метод «трикутника Паскаля».

Метод трикутника Паскаля.

Приклад 1. Побудувати поліном Жегалкіна для функції f . Візьмемо функцію голосування $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 = (00010111)$.

Крок 1. Будуємо таблицю значень фнкції (рядки таблиці йдуть в порядку збільшення двоїстих кодів). Таблицю краще розташовувати в лівій частині сторінки.

x_1	x_2	x_3	f		
0	0	0	0	1	0 0 0 1 0 1 1 1
0	0	1	0	x_3	0 0 1 1 1 0 0
0	1	0	0	x_2	0 1 0 0 1 0
0	1	1	1	$x_2 x_3 \Rightarrow$	1 1 0 1 1
1	0	0	0	x_1	0 1 1 0
1	0	1	1	$x_1 x_3 \Rightarrow$	1 0 1
1	1	0	1	$x_1 x_2 \Rightarrow$	1 1
1	1	1	1	$x_1 x_2 x_3 \Rightarrow$	0

Крок 2. Побудова трикутника. Для цього беремо вектор значень функції і виписуємо його навпроти першого рядка таблиці. Далі заповнюємо трикутник, складаючи попарно сусідні значення за модулем 2. Результат додавання записуємо нижче.

Крок 3. Побудова полінома Жегалкіна. Нас цікавить ліва сторона трикутника (значення виділені жирним). Числа на лівій стороні (виділені жирним шрифтом) трикутника є коефіцієнтами поліному при монотонних кон'юнкціях, які відповідають наборам значень змінних. Тепер випишемо для наочності ці кон'юнкції. Кон'юнкції виписуємо за двоїстими наборами в лівій частині таблиці за наступним принципом: якщо навпроти змінної x_i стоїть 1, то змінна входить в кон'юнкцію, в протилежному випадку – змінна відсутня в кон'юнкції. Набору (0,0,0) відповідає 1.

Якщо принцип отримання кон'юнкцій зрозумілий, то стовпчик з ним (краще) не виписувати, а доразу переходити о побудови поліному. Для побудови поліному необхідні кон'юнкції тільки з рядків з одиницями на лівій стороні трикутника. Це і є кон'юнкції, що входять до складу полінома Жегалкіна. Залишилося виписати сам поліном:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_3.$$

Якщо змінних в функції не 3, а 4 і більше, то метод працює без змін, тільки змінюється розмір таблиці. Тим не менш, на відміну від методу невизначених коефіцієнтів, розрахунки можна виконувати без зайвих зусиль.

Метод невизначених коефіцієнтів.

Приклад 2. Знайдемо поліном Жегалкіна для функції $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \vee x_3) \rightarrow \overline{x_2}$, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Для цього спочатку необхідно побудувати таблицю істинності для булевої функції $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \vee x_3) \rightarrow \overline{x_2}$.

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 \vee x_3$	$\overline{x_2}$	f
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Загальний вигляд поліному Жегалкіна для функції трьох змінних:

$f(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3$. Послідовно представимо набори значень змінних і знаходимо коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_{123} .

$$f(0,0,0) = a_0 = 1;$$

$$f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3 = 1 \oplus a_3 = 1 \Rightarrow a_3 = 0;$$

$$f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2 = 1 \oplus a_2 = 1 \Rightarrow a_2 = 0;$$

$$f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{23} = 1 \oplus a_{23} = 0 \Rightarrow a_{23} = 1;$$

$$f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1 = 1 \oplus a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = 0;$$

$$f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{13} = 1 \oplus a_{13} = 1 \Rightarrow a_{13} = 0;$$

$$f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus a_{12} = 1 \oplus a_{12} = 0 \Rightarrow a_{12} = 1;$$

$$f(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus a_{123} = 1 \oplus a_{123} = 0 \Rightarrow a_{123} = 1$$

Підставляючи отримані коефіцієнти, отримаємо поліном Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3.$$

Метод трикутника Паскаля. Знайдемо поліном Жегалкіна тієї ж самої функції, застосовуючи трикутник Паскаля.

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 \vee x_3$	$\overline{x_2}$	f		
0	0	0	0	0	1	1	1	1 1 1 0 1 1 0 0
0	0	1	0	1	1	1	x_3	0 0 1 1 0 1 0
0	1	0	0	0	0	1	x_2	0 1 0 1 1 1
0	1	1	0	1	0	0	$x_2 x_3 \Rightarrow$	1 1 1 0 0
1	0	0	0	0	1	1	x_1	0 0 1 0
1	0	1	0	1	1	1	$x_1 x_3$	0 1 1
1	1	0	1	1	0	0	$x_1 x_2 \Rightarrow$	1 0
1	1	1	1	1	0	0	$x_1 x_2 x_3 \Rightarrow$	1

Поясню ще один раз як заповнюється трикутник Паскаля. Верхній рядок трикутника задає вектор значень мулевої функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 = (00010111)$. В кожному рядку, починаючи з другого, будь-який елемент такого трикутника обчислюється як сума за модулем 2 двох сусідніх елементів попереднього рядка.

Лівій стороні трикутника Паскаля відповідають набори значень змінних вхідної функції

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3 = (00010111)$. З'єднаючи знаком кон'юнкції змінні, значення яких в наборі дорівнюють 1, ми отримаємо доданок в поліномі Жегалкіна. Набору (0,0,0) відповідає x_3 і так далі. Оскільки одиницям лівої сторони трикутника відповідають доданки

1, $x_1 x_2$; $x_2 x_3$; $x_1 x_2 x_3$, то поліном Жгалкіна: $f(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$.

Перетворення ДНФ. Застосовуючи основні закони алгебри логіки, приведемо спочатку дану функцію до ДНФ: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 \vee x_3) \rightarrow \overline{x_2} =$ (застосуємо рівнозначність

$$x \rightarrow y = \overline{x} \vee y) = \overline{(x_1 x_2 \vee x_3)} \vee \overline{x_2} =$$

$$(\text{застосуємо закон де Моргана}) = \overline{x_1 x_2} \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_2} =$$

$$(\text{застосуємо ще раз закон де Моргана}) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_2} =$$

$$(\text{застосуємо закон поглинання } \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \vee \overline{x_2} = \overline{x_2}) =$$

$$\overline{x_1} \overline{x_3} \vee \overline{x_2} - \text{ДНФ.}$$

Далі в отриманій ДНФ необхідно позбутися диз'юнкцій, використовуючи закони де Моргана:

$$\overline{x_1 x_3} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3} = \overline{x_1 \vee x_3} \cdot \overline{x_1 \wedge x_3 \vee x_2} = \overline{x_1 \wedge x_3 \wedge x_2} = \overline{x_1 x_3 x_2}. \text{ Замінюємо кожне заперечення } \overline{x} = 1 \oplus x \text{ і застосовуємо згадані вище закони, отримаємо:}$$

$$\overline{x_1 x_3 x_2} = 1 \oplus \overline{x_1 x_3 x_2} = 1 \oplus (1 \oplus (1 \oplus x_1) \oplus (1 \oplus x_3) x_2) = 1 \oplus (1 \oplus 1 \oplus x_3 \oplus x_1 \oplus x_{13}) x_2 = 1 \oplus (x_3 \oplus x_1 \oplus x_{13}) x_2 = 1 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$$

Перетворення ДДНФ.

x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_2 \vee x_3$	$\overline{x_2}$	f
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0

Для побудови ДДНФ за таблицею істинності обираємо набори, на яких функція f приймає значення, що дорівнює 1. Якщо значення змінної в цьому наборі дорівнює 0, то вона береться із запереченням, якщо значення змінної дорівнює 1, то змінна береться без заперечення. З'єднавши знаком кон'юнкції всі змінні відповідного набору, отримаємо елементарну кон'юнкцію. Тоді диз'юнкція всіх таких елементарних кон'юнкцій і є ДДНФ.

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3}$. Щоб побудувати поліном Жегалкіна через ДДНФ, необхідно виключити операції диз'юнкції і заперечення, потім розкрити дужки.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1 x_2 x_3} = (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2)x_3 \oplus (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_3)x_2 \oplus x_1 x_3(1 \oplus x_2) = (1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2)(1 \oplus x_3) \oplus (1 \oplus x_2 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2)x_3 \oplus (1 \oplus x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3)x_2 \oplus (1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_2 x_3)x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 = (1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3) \oplus (x_3 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3) \oplus (x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3) \oplus (x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3) \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 = 1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3$$

- Поліном Жегалкіна.

2.1. Лінійні і монотонні функції. Булева функція називається лінійною, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних. Наприклад, $x \approx y = 1 \oplus x \oplus y$ - лінійна булева функція.

Булева функція f називається монотонною, якщо для будь-яких пар наборів значень змінних (x_1, x_2, \dots, x_n) та (y_1, y_2, \dots, y_n) , для яких виконується відношення $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n)$ правильна і нерівність $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Приклад 3. Дослідити на монотонність функцію $f(x, y) = x \approx y$. Запишемо всі набори значень змінних, для яких виконується відношення порядку, визначимо значення функції на даних наборах і порівняємо їх.

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$(0,0) \leq (0,1); f(0,0)=1; f(0,1)=0; f(0,0) \geq f(0,1);$
 $(0,0) \leq (1,0); f(0,0)=1; f(1,0)=0; f(0,0) \geq f(1,0);$
 $(0,0) \leq (1,1); f(0,0)=1; f(1,1)=1; f(0,0) \leq f(1,1);$
 $(0,1) \leq (1,0); f(0,1)=0; f(1,0)=0; f(0,1) \leq f(1,0);$
 $(0,1) \leq (1,1); f(0,1)=0; f(1,1)=1; f(0,1) \leq f(1,1);$
 $(1,0) \leq (1,1); f(1,0)=0; f(1,1)=1; f(1,0) \leq f(1,1);$

Функція $f(x, y) = x \approx y$ не є монотонною.

Приклад 4. Дослідити на монотонність функцію $f(x,y)=x \wedge y$,

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$(0,0) \leq (0,1); f(0,0)=0; f(0,1)=0; f(0,0) \leq f(0,1);$
 $(0,0) \leq (1,0); f(0,0)=0; f(1,0)=0; f(0,0) \leq f(1,0);$
 $(0,0) \leq (1,1); f(0,0)=0; f(1,1)=1; f(0,0) \leq f(1,1);$
 $(0,1) \leq (1,0); f(0,1)=0; f(1,0)=0; f(0,1) \leq f(1,0);$
 $(0,1) \leq (1,1); f(0,1)=0; f(1,1)=1; f(0,1) \leq f(1,1);$
 $(1,0) \leq (1,1); f(1,0)=0; f(1,1)=1; f(1,0) \leq f(1,1);$

Функція $f(x,y)=x \wedge y$ є монотонною.

2.2. Класи булевих функцій.

Класами Поста називають такі 5 множин мулевих функцій:

T_0 - клас функцій, що зберігає 0; $T_0 = \{f \in P_2 \mid f(0,0,\dots,0) = 0\};$

T_1 - клас функцій, що зберігає 1; $T_1 = \{f \in P_2 \mid f(1,1,\dots,1) = 1\};$

S – клас само двоїстих функцій $S = \{f \in P_2 \mid \forall a_1 \dots a_n f(a_1 \dots a_n) = \overline{f(\overline{a_1} \dots \overline{a_n})}\};$

M – клас монотонних функцій $M = \{f \in P_2 \mid \forall \alpha \forall \beta \alpha \leq \beta \rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\};$

L - клас лінійних функцій $L = \{f \in P_2 \mid f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n\}$. Булева функція може належати одному або кільком класам, та не належати жодному.

Теорема 1. Кожний з класів Поста – замкнений. Це означає, що будь-яка суперпозиція функцій з одного класу Поста призводить до функції того ж класу.

Теорема 2. Критерій повноти Поста. Система суми мулевих функцій повна тоді і тільки тоді, коли вона містить хоча б одну функцію, що не зберігає нуль, хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю, хоча б одну немонотонну функцію, хоча б одну несамо двоїсту функцію і хоча б одну неліній функцію.

Ненадлишковий повний набір функцій називається **базисом** («не надлишковий» означає, що якщо якусь функцію видалити з набору, то цей набір перестане бути повним).

Відповідно до теореми Поста набір функцій буде повним тоді і тільки тоді, коли в кожному стовпчику таблиці Поста є хоча б один «мінус»

f	T_0	T_1	L	M	S
f_1	+	-	+	-	-
f_2	+	-	-	-	+
f_3	-	+	-	-	-
f_4	+	+	-	+	-

З наведеної таблиці випливає, що дані чотирьох функцій утворюють повний набір, але ці функції не є базисом. З цих функцій можна утворити два базиси: $f_3 f_1$ і $f_3 f_2$. Повними наборами будуть будь-які набори, що містять будь-який базис.

Приклад 5. Визначити за допомогою теореми Поста, чи є система $\{x \vee y, \bar{x}\}$ функціонально повною.

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1
\bar{x}	\bar{y}	$\overline{x \vee y}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

- 1) $f(x) = x \vee y = xy \oplus x \oplus y$ - функція нелінійна, бо має кон'юнкцію;
- 2) Зберігає 0 $f(0,0) = 0$;
- 3) Зберігає 1 $f(1,1) = 1$
- 4) $(0,0) \leq (0,1)$; $f(0,0)=0$; $f(0,1)=1$; $f(0,0) \leq f(0,1)$;
 $(0,0) \leq (1,0)$; $f(0,0)=0$; $f(1,0)=1$; $f(0,0) \leq f(1,0)$;
 $(0,0) \leq (1,1)$; $f(0,0)=0$; $f(1,1)=1$; $f(0,0) \leq f(1,1)$;
 $(0,1) \leq (1,0)$; $f(0,1)=1$; $f(1,0)=1$; $f(0,1) \leq f(1,0)$;
 $(0,1) \leq (1,1)$; $f(0,1)=1$; $f(1,1)=1$; $f(0,1) \leq f(1,1)$;
 $(1,0) \leq (1,1)$; $f(1,0)=1$; $f(1,1)=1$; $f(1,0) \leq f(1,1)$;
- 5) Несамодвоїста $f(x, y) \neq \bar{f}(\bar{x}, \bar{y})$.

x	\bar{x}
0	1
1	0
\bar{x}	$\overline{\bar{x}}$
1	1
0	0

- 1) $f(x) = \bar{x} = 1 \oplus x$ - лінійна;
- 2) Не зберігає 0 $f(0) \neq 0$;
- 3) Не зберігає 1 $f(1) \neq 1$;
- 4) Самодвоїста $f(x) = \bar{f}(\bar{x})$.

Зведемо всі дані в таблицю:

Назва властивості	\bar{x}	$x \vee y$
Лінійність	-	+
Монотонність	-	+
Зберігає 0	-	+
Зберігає 1	-	+
Самодвоїстість	+	-

В кожному рядку таблиці присутній знак «мінус». Отже, для кожного класу є хоча б одна функція, що не зберігає 0, що не зберігає 1, нелінійна, немонотонна і несамодвоїста. За теоремою Поста така система функцій є функціонально повною.

Приклад 6. Довести повноту або неповноту приведеної системи мулевих функцій $\{f_1 = x_1 \wedge x_2, f_2 = 0, x_3 = x_1 \approx x_2\}$.

Застосуємо теорему Поста про повноту. Для того, щоб система мулевих функцій була повною необхідно і достатньо, щоб вона містила хоча б одну функцію, що не зберігає 0, хоча

б одну, що не зберігає 1, хоча б одну неліній функцію, хоча б одну несамодвоїсту і хоча б одну немонотонну функції. Складемо таблицю істинності функцій.

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	1
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Функція f_3 не зберігає 0, так як $f_3(0,0)=1$. Функція f_2 не зберігає 1, так як $f_2(1,1)=0$.

Функція f_1 - несамодвоїста, так як $f_1(0,1) \neq \overline{f_1(1,0)}=1$. Функція f_3 - немонотонна, так як для впорядкованих наборів $(0,0) \leq (0,1)$ вона приймає значення $f_3(0,0)=1 \geq f_3(0,1)$. Функція f_1 - нелінійна. Покажемо це. Нехай

$$f_1 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2$$

$$f_1(0,0) = a_0 \oplus 0 \oplus 0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0;$$

$$f_1(0,1) = a_0 \oplus 0 \oplus a_2 = 0 \oplus a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0; \quad f=0, \text{ що не вірно.}$$

$$f_1(1,0) = a_0 \oplus a_1 = 0 \oplus a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Таким чином за теоремою Поста система $\{f_1 = x_1 \wedge x_2, f_2 = 0, x_3 = x_1 \approx x_2\}$ повна, бо містить функцію, що не зберігає 0, функцію, що не зберігає 1, несамодвоїсту функцію, нелінійну функцію і немонотонну функцію.

Приклад 7. Визначити до яких класів Поста відноситься функція $F = \overline{x_1}x_3 \vee x_1\overline{x_3}$, додати, якщо це необхідно до F елементарні функції, щоб отримана множина була повною.

Складемо таблицю істинності для функції $F = \overline{x_1}x_3 \vee x_1\overline{x_3}$

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_3}$	$\overline{x_1}x_3$	$x_1\overline{x_3}$	F		
0	0	0	1	1	0	0	0		0 1 0 1 1 0 1 0
0	0	1	1	0	1	0	1	$x_3 \Rightarrow$	1 1 1 0 1 1 1
0	1	0	1	1	0	0	0		0 0 1 1 0 0
0	1	1	1	0	1	0	1		0 1 1 1 0
1	0	0	0	1	0	1	1	$x_1 \Rightarrow$	1 0 0 1
1	0	1	0	0	0	0	0		1 0 1
1	1	0	0	1	0	1	1		1 1
1	1	1	0	0	0	0	0		0

Функція F зберігає 0 ($F \in T_0$), так як $F(0,0,0)=0$;

Функція F не зберігає 1 ($F \notin T_1$), так як $F(1,1,1)=0$;

Функція F не є монотонною ($F \notin M$), так як на порівнюваних наборах $(0,0,1) \leq (1,0,1)$, отримуємо $F(0,0,1)=1$ і $F(1,0,1)=0$ $F(0,0,1) \geq F(1,0,1)$;

Функція F не є само двоїстою ($F \notin S$), так як на протилежних наборах приймає однакові значення $F(0,0,0)=F(1,1,1)=0$;

Функція F є лінійною ($F \in L$), так як її поліном має вигляд $F = x_1 \oplus x_3$.

Щоб доповнити функцію до повної системи необхідно ввести функцію, що не зберігає 0 і є нелінійною, в якості такої функції можна обрати $G = x \rightarrow y$ (імплікація). Множина $\{F, G\}$ -повна.

Домашнє завдання.

1. Перевірити на повноту систему булевих функцій $\{x_1 \vee x_2, x_1 \rightarrow x_2\}$.
2. Перевірити, чи є повною система $J = \{x \rightarrow \overline{y}, \overline{x} \wedge y\}$.

3. Скласти поліном Жегалкіна методом невизначених коефіцієнтів і за допомогою трикутника Паскаля для $F = \overline{A}(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow B)$.