

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

О. В. Борисов, Т. Л. Волхова, Л. М. Королевич

ТВЕРДОТІЛЬНА ЕЛЕКТРОНІКА: ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю
153 «Мікро- та наносистемна техніка»,
спеціалізаціями
«Мікро-та наноелектронні прилади і пристрої»
«Мікроелектронні інформаційні системи»
«Електронні біомедичні системи і технології»
«Інформаційні технології проектування в електроніці та наносистемах»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензент: Лошицький П.П., проф., д.т.н., проф.

Відповідальний редактор: Борисов О.В., в.о. зав. каф. мікроелектроніки., к.т.н., проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол №9 від 24.05.2018 р.)
за поданням Вченої ради факультету електроніки
(протокол № 05/18 від 21.05.2018 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Борисов Олександр Васильович, канд. техн. наук, проф.
Волхова Тетяна Любомирівна, канд. техн. наук, доц.
Королевич Любомир Миколайович

ТВЕРДОТІЛЬНА ЕЛЕКТРОНІКА:
ПРАКТИКУМ

Твердотільна електроніка: практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 153 «Мікро- та наносистемна техніка», спеціалізацій «Мікро-та наноелектронні прилади і пристрої», «Мікроелектронні інформаційні системи», «Електронні біомедичні системи і технології», «Інформаційні технології проектування в електроніці та наносистемах»/ О. В. Борисов, Т. Л. Волхова, Л. М. Королевич; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові данні (1 файл: 5,73 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 108 с.

© О. В. Борисов, Т. Л. Волхова, Л. М. Королевич, 2018
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ	4
1. Кристалічні ґратки та типи хімічних зв'язків	6
2. Статистика електронів і дірок в напівпровідниках	13
3. Кінетичні явища в напівпровідниках	24
3.1. Електропровідність	24
3.2. Гальваномагнітні явища	33
3.3. Термоелектричні явища	40
4. Контактні явища	49
5. Біполярні прилади	57
6. Уніполярні прилади	65
7. Оптичні властивості напівпровідників	73
8. Процеси поглинання в напівпровідниках і прилади на їх основі	81
9. Процеси випромінювання з напівпровідників	88
10. Квантово-розмірні ефекти і прилади, надґратки	90
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	104

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник написано у відповідності з програмою дисципліни «Твердотільна електроніка» для студентів, які навчаються за спеціальністю 153 «Мікро- та наносистемна техніка».

У навчальному посібнику наведена методика розв'язування задач по твердотільній електроніці з детальним поясненням послідовності рішень та відповідями.

Даний навчальний посібник дозволить закріпити теоретичні знання студентів, може бути використаний на практичних заняттях по курсу «Твердотільна електроніка» та допомогти студентам навчитись самостійно вирішувати завдання.

Навчальний посібник складається з одинадцяти розділів та базується на навчальному посібнику «Задачі по твердотільній електроніці» авторів Ю.В. Аркуши, М.І. Білецького та Е.Д. Прохорова.

Навчальний посібник може бути рекомендований і для студентів, які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка».

ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА СКОРОЧЕНЬ

p – концентрація дірок

n – концентрація електронів

n_n, p_p – концентрація основних носіїв заряду

p_n, n_p – концентрація неосновних носіїв заряду

n_{n0}, p_{p0} – рівноважна концентрація основних носіїв заряду

p_{n0}, n_{p0} – рівноважна концентрація неосновних носіїв заряду

n_i – власна концентрація носіїв заряду

N – концентрація домішок, кількість атомів

N_A, N_D – концентрація акцепторної та донорної домішок

N'_A, N'_D – градієнт акцепторної та донорної домішок

ϕ – електричний потенціал

ϕ_p, ϕ_n – розподіл електричного потенціалу в областях p та n

ϕ_0 – висота потенціального бар'єру p - n -переходу в рівноважному стані

ϕ_T – температурний потенціал

E – електричне поле

E_p, E_n – розподіл електричного поля в областях p та n

U – напруга

U_b – напруга пробою

I – струм

I_0 – тепловий струм p - n -переходу

q – елементарний заряд

x, y, z – просторова метрична координата

l_{pn} – ширина p - n -переходу

l_0 – ширина p - n -переходу в рівноважному стані

l_p, l_n – ширина p - n -переходу в області p та n

S_{pn} – площа поперечного перерізу p - n -переходу

W_B, W_E, W_K – ширина бази, емітера та колектора

L_p, L_n – дифузійна довжина дірок та електронів

D_p, D_n – коефіцієнт дифузії дірок та електронів

μ_p, μ_n – рухливість дірок та електронів

τ_p, τ_n – час життя дірок та електронів

ϵ_s – діелектрична проникність напівпровідника

ϵ_0 – діелектрична постійна

\hbar – постійна Планка

α, β – коефіцієнт передачі струму біполярного транзистора в схемі з ЗБ та ЗЕ

m^* – ефективна маса

m_p^*, m_n^* – ефективна маса дірок та електронів

E – енергія

E_g – ширина забороненої зони

α_1 – коефіцієнт ударної іонізації

α_p, α_n – коефіцієнт ударної іонізації дірок та електронів

I_1 – іонізаційний інтеграл

ψ – хвильова функція

Γ_n – ширина резонансного рівня в квантовій ямі

ВАХ – вольт амперна характеристика

МДН – метал-діелектрик-напівпровідник

МОН – метал-окисел-напівпровідник

ЕРС – електрорушійна сила

Розділ 1 Кристалічні ґратки та типи хімічних зв'язків

Задача 1. Визначення індексів Міллера.

Розв'язок: Орієнтація ковалентного кристала визначається завданням вектору нормалі до атомної площини, положення якої можна задати по координатах будь-яких трьох різних атомів, що не лежать на одній прямій, але що належать цій площині. Нехай, наприклад, координати атомів такі $A(1, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 2)$ і тоді шукана площина може бути задана довжиною відрізків, що відсікаються нею на координатних осях, тобто числами 1, 3, 2.

Відмічена властивість площини покладена в основу визначення індексів Міллера, алгоритм знаходження яких такий:

1) визначаються точки перетину цієї площини з кристалографічними осями координат: $A(x, 0, 0)$, $B(0, y, 0)$ і $C(0, 0, z)$;

2) ненульові координати записуються у вигляді вектору $\vec{k} = (x, y, z)$;

3) складається пропорція із зворотних величин координат вектору \vec{k} ;

4) складена пропорція множиться на найменше спільне кратне

$$1/x : 1/y : 1/z = (1/x : 1/y : 1/z) \cdot xyz = yz : zx : xy = h : k : l ;$$

5) знайдені три цілих числа $h : k : l$ формують індекс Міллера (hkl) цієї площини.

Визначимо індекс Міллера для наведеного вище прикладу.

За координатами точок перетину даної площини з кристалографічними осями координат, тобто з точок $A(1, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 2)$, складемо вектор $\vec{k} = (1, 3, 2)$. Складемо пропорцію зворотних координат вектора \vec{k}

$$1/1 : 1/3 : 1/2 .$$

Помножимо отриману пропорцію на найменше спільне кратне чисел 1, 3, 2, тобто на 6

$$(1/1 : 1/3 : 1/2) \cdot 6 = 6 : 2 : 3 .$$

Отже, індекс Міллера для шуканої площини запишеться як (623) .

Задача 2. Визначити щільність упаковки для простої кубічної ґратки, ОЦК, ГЦК, для ґратки типу алмаз.

Розв'язок: У разі ковалентних кристалів, відносну щільність упаковки кристалічної ґратки можна визначити, як відношення обсягу, якій атомами займають в комірці, до обсягу самої комірки, тобто:

$$Q = nV_a/V ,$$

де $n = n_{vertex}/8 + n_{facet}/2 + n_{inner}$ – число атомів в комірці, n_{vertex} – число атомів, розташованих у вершинах комірки, n_{facet} – число атомів, розташованих на гранях комірки, n_{inner} – число атомів, розташованих усередині комірки.

Вважаючи, що атоми являють собою сфери радіуса R , тобто займають об'єм $V_a = \frac{4}{3}\pi R^3$, отримаємо для відносної щільності упаковки

$$Q = n \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 / V .$$

Виходячи з того, що розглядається кубічна сингонія, визначимо обсяг окремої комірки через параметр ґратки як $V = a^3$. Отже, остаточна формула для обчислень набуде вигляду

$$Q = \frac{4}{3}\pi n (R/a)^3 .$$

У разі примітивної кубічної ґратки, атоми розташовуються по 8-мі вершинам комірки і відсутні як на гранях комірки, так і в її центрі і, таким чином, загальне число атомів в даній комірці визначиться так

$$n = n_{\text{vertex}}/8 + n_{\text{facet}}/2 + n_{\text{inner}} = 8/8 + 0/2 + 0 = 1.$$

У цій же комірці, атоми дотикаються вздовж параметра ґратки, тобто

$$a = 2R.$$

Отже, шукана відносна щільність упаковки в примітивних кубічних ґратках визначається так

$$Q_p = \frac{4}{3} \pi n (R/a)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2} a/a\right)^3 = \pi/6 \approx 52,36\%.$$

У разі об'ємноцентрованої кубічної ґратки, атоми розташовуються по 8-ми вершинам комірки, присутній один атом в центрі комірки, і відсутні на гранях комірки. Таким чином, загальне число атомів в даній комірці визначиться так

$$n = n_{\text{vertex}}/8 + n_{\text{facet}}/2 + n_{\text{inner}} = 8/8 + 0/2 + 1 = 2.$$

У цій же комірці, атоми дотикаються вздовж половини об'ємної діагоналі куба, тобто

$$d/2 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}/2 = \sqrt{3}a/2 = 2R.$$

Отже, шукана відносна щільність упаковки в об'ємноцентрованих кубічних ґратках визначається так

$$Q_I = \frac{4}{3} \pi n (R/a)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a/a\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi \approx 68,02\%.$$

У разі гранецентрованої кубічної ґратки, атоми розташовуються по 8-ми вершинам комірки і по 6-ти граням і відсутні в центрі комірки. Таким чином, загальне число атомів в даній комірці визначиться так

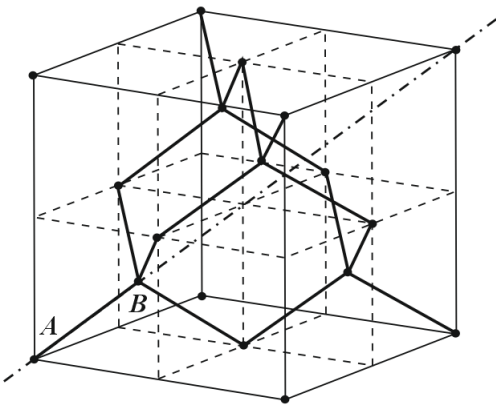
$$n = n_{\text{vertex}}/8 + n_{\text{facet}}/2 + n_{\text{inner}} = 8/8 + 6/2 + 0 = 4.$$

У цій же комірці, атоми дотикаються вздовж половини діагоналі грані куба, тобто

$$d/2 = \sqrt{a^2 + a^2}/2 = a/\sqrt{2} = 2R.$$

Отже, шукана відносна щільність упаковки в гранецентрованих кубічних ґратках визначиться так

$$Q_F = \frac{4}{3} \pi n (R/a)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} a/a\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi \approx 74,05\%.$$



В випадку кубічної ґратки типу алмаз, атоми розташовуються по 8-ми вершинам комірки, по 6-ти граней і 4-ри атома присутній в центрі комірки (див. рис.). Таким чином, загальне число атомів в даній комірці визначиться так

$$n = n_{\text{vertex}}/8 + n_{\text{facet}}/2 + n_{\text{inner}} = 8/8 + 6/2 + 4 = 8.$$

У цій же комірці, атоми дотикаються вздовж чверті об'ємної діагоналі грані куба (на наведеному рис.1 це відстань між атомами А і В), тобто

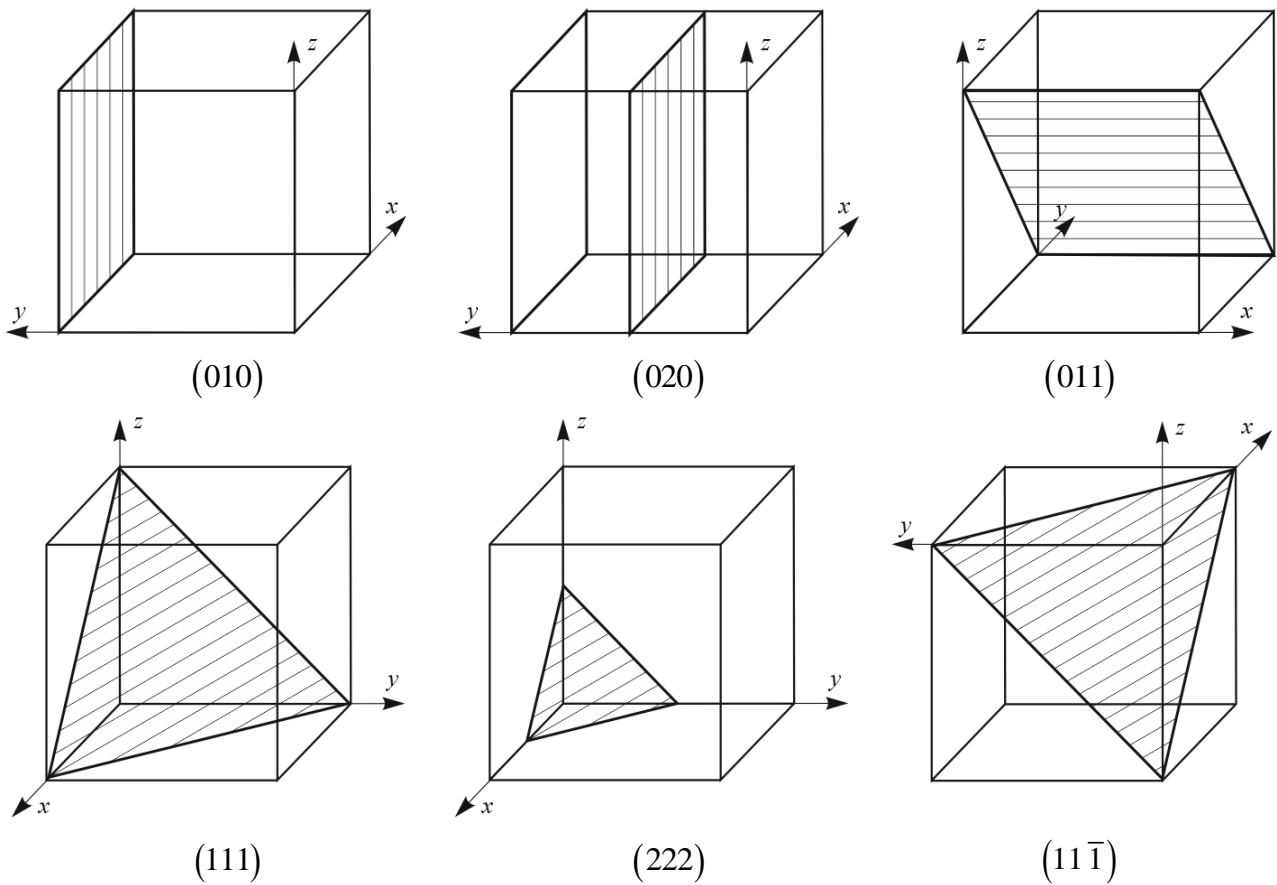
$$d/4 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}/4 = \sqrt{3}a/4 = 2R.$$

Отже, шукана відносна щільність упаковки в кубічних ґратках типу алмаз визначиться так

$$Q_C = \frac{4}{3} \pi n (R/a)^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{8} a/a\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi \approx 34,01\%.$$

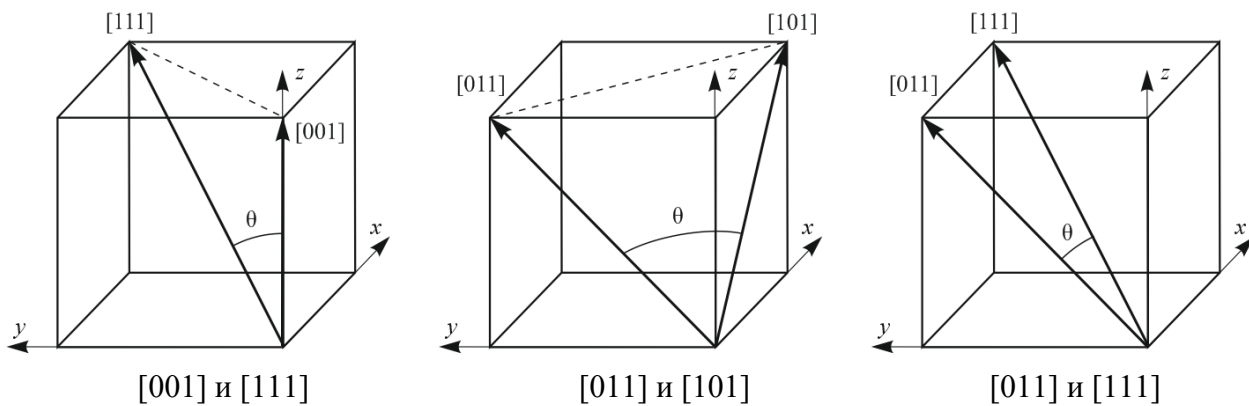
Задача 3. На прикладі простої кубічної ґратки намалювати площини, які відповідають таким індексам Міллера: (010), (020), (011), (111), (222), (11 $\bar{1}$).

Розв'язок: Шукані площини задані відповідними індексами Міллера наведено на рисунку:



Задача 4. Визначити кути між наступними кристалографічними напрямками в кубічному кристалі: а) між $[001]$ і $[111]$; б) між $[011]$ і $[101]$; в) між $[011]$ і $[111]$.

Розв'язок: Графічний вид розглянутих випадків наведено на наступному рисунку:



Косинус кута між кристалографічними напрямками $(h_1k_1l_1)$ і $(h_2k_2l_2)$ в кубічних кристалах визначається так

$$\cos \theta = \frac{h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2} \cdot \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо

$$\cos \theta_{([001],[111])} = \frac{0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \cos \theta_{([011],[101])} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

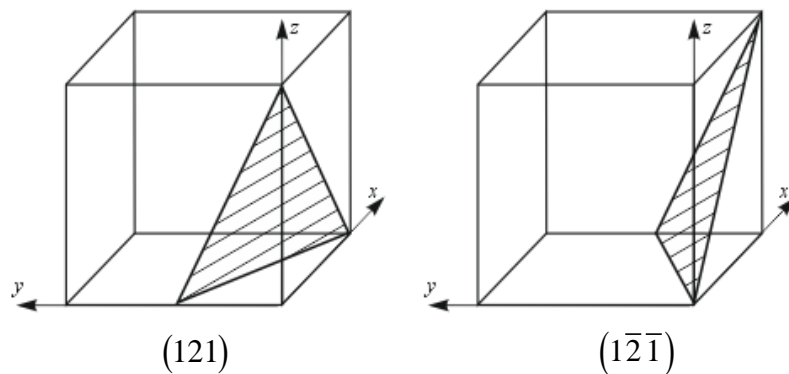
$$\cos \theta_{([011],[111])} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

З отриманих значень косинусів визначимо величини шуканих кутів

$$\theta_{([001],[111])} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} = 54,74^\circ, \theta_{([011],[101])} = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ \text{ и } \theta_{([011],[111])} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3} = 35,26^\circ.$$

Задача 5. У примітивній кубічній кристалічній ґратці побудувати площини з індексами Міллера (121) і $(1\bar{2}\bar{1})$.

Розв'язок: Перш за все, відзначимо, що індекси Міллера відображають площину з точністю до величини паралельного перенесення, інакше кажучи, площини з індексами (hkl) і (hn, kn, ln) , де n – довільне ціле число не рівне нулю, вважаються ідентичними. В силу зазначеного, проведемо побудову шуканих площин (121) і $(1\bar{2}\bar{1})$, наведених на наступному рисунку:



Задача 6. В систему $\{111\}$ кубічного кристалу входять площини (111) , $(\bar{1}11)$, $(1\bar{1}1)$, $(11\bar{1})$, $(1\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}1\bar{1})$, $(\bar{1}\bar{1}1)$, $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$. Які з цих площин паралельні? Яку просторову фігуру утворюють всі ці площини при взаємному перетині?

Розв'язок: Косинус кута між площинами $(h_1k_1l_1)$ і $(h_2k_2l_2)$ в кубічних кристалах визначається так

$$\cos \theta = \frac{h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2} \cdot \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}.$$

Визначимо всі можливі косинуси кутів даного сімейства площин:

$\cos \theta$	(111)	$(\bar{1}11)$	$(1\bar{1}1)$	$(11\bar{1})$	$(1\bar{1}\bar{1})$	$(\bar{1}1\bar{1})$	$(\bar{1}\bar{1}1)$	$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$
(111)	1	1/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3	-1/3	-1
$(\bar{1}11)$	1/3	1	-1/3	-1/3	-1	1/3	1/3	-1/3
$(1\bar{1}1)$	1/3	-1/3	1	-1/3	1/3	-1	1/3	-1/3
$(11\bar{1})$	1/3	-1/3	-1/3	1	1/3	1/3	-1	-1/3
$(1\bar{1}\bar{1})$	-1/3	-1	1/3	1/3	1	-1/3	-1/3	1/3
$(\bar{1}1\bar{1})$	-1/3	1/3	-1	1/3	-1/3	1	-1/3	1/3
$(\bar{1}\bar{1}1)$	-1/3	1/3	1/3	-1	-1/3	-1/3	1	1/3
$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$	-1	-1/3	-1/3	-1/3	1/3	1/3	1/3	1

Очевидно, що шукані площини паралельні тільки тоді, коли $|\cos \theta| = 1$. Аналізуючи розрахункову таблицю, отримаємо 4-ри пари паралельних площин, а саме, (111) і $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, $(\bar{1}11)$ і $(1\bar{1}\bar{1})$, $(1\bar{1}1)$ і $(\bar{1}1\bar{1})$, $(11\bar{1})$ і $(\bar{1}\bar{1}1)$.

Дане сімейство площин утворює при взаємному перетині правильний октаедр.

Задача 7. Визначити відстань між найближчими паралельними площинами $\{111\}$ в кубічній кристалічній ґратці з періодом a елементарної комірки.

Розв'язок: Шукану відстань визначимо за відомою формулою

$$d = \frac{a}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} = \frac{a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Задача 8. Обчислити відносну зміну об'єму матеріалу при переході з гранецентрованої в об'ємноцентровану кубічну ґратку, якщо міжатомні відстані в цих структурах відповідно рівні 0,254 і 0,248 нм.

Розв'язок: Перш за все, перепишемо вихідні дані у вигляді

$$r_F = 2R_F = 0,254 \text{ нм} \text{ и } r_I = 2R_I = 0,248 \text{ нм},$$

де R_F та R_I – радіуси атомів матеріалу в гранецентрованій і в об'ємноцентрованій кубічних ґратках відповідно.

Запишемо вирази відносної щільності упаковки даних ґраток

$$Q_F = \frac{4}{3} \pi n_F (R_F/a)^3 = \frac{4}{3} \pi n_F R_F^3 / V_{F\text{-cell}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi,$$

$$Q_I = \frac{4}{3} \pi n_I (R_I/a)^3 = \frac{4}{3} \pi n_I R_I^3 / V_{I\text{-cell}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi,$$

де $n_F = 4$ і $n_I = 2$ – число атомів що припадають на одну комірку.

З наведених виразів визначимо об'єми заданих комірок:

$$V_{F\text{-cell}} = 4\sqrt{2} \cdot n_F R_F^3, \quad V_{I\text{-cell}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} n_I R_I^3.$$

Визначимо об'єми, що припадають на один атом речовини:

$$V_F = V_{F\text{-cell}} / n_F = 4\sqrt{2} \cdot R_F^3, \quad V_I = V_{I\text{-cell}} / n_I = \frac{32}{3\sqrt{3}} \cdot R_I^3.$$

Визначимо відношення отриманих величин:

$$V_F / V_I = \frac{3\sqrt{6}}{8} (R_F / R_I)^3 = \frac{3\sqrt{6}}{8} (r_F / r_I)^3.$$

Шукана величина зміни обсягу (по відношенню до обсягу об'ємноцентрованої ґратки) визначиться так:

$$\delta_V = \frac{V_I - V_F}{V_I} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{V_F}{V_I}\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{3\sqrt{6}}{8} (r_F / r_I)^3\right) \cdot 100\% = \left(1 - \frac{3\sqrt{6}}{8} \cdot \left(\frac{0,254}{0,248}\right)^3\right) \cdot 100\% \approx 1,31\%.$$

Задача 9. Відомо, що алюміній кристалізується в ґратках гранецентрованого куба з періодом $a = 0,4041$ нм. Обчислити концентрацію вільних електронів, вважаючи, що на кожен атом кристалічної ґратки доводиться три електрона ($k = 3$).

Розв'язок: Врахувавши, що в гранецентрованої комірки знаходиться чотири атома, тобто $n_F = 4$, визначимо обсяг одного атома алюмінію

$$V = a^3 / n_F,$$

і, отже, концентрація атомів в одиниці об'єму визначиться так $n_a = V^{-1} = n_F / a^3$.

Отже, шукана концентрація електронів знайдеться так

$$n = k n_a = k n_F / a^3 = \frac{3 \cdot 4}{(0,4041 \cdot 10^{-9})^3} = 1,8185 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3} \approx 1,82 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 10. Обчислити період кристалічної ґратки міді, якщо її щільність дорівнює $\rho_{Cu} = 8920 \text{ кг/м}^3$, а елементарна ґратка є гранецентрованим кубом. Визначити об'єм, що приходить на один атом.

Розв'язок: Перш за все, запишемо величину щільності міді:

$$\rho_{Cu} = 8,92 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 8,92 \cdot 10^6 \text{ г/м}^3 = 8,92 \text{ г/см}^3.$$

Далі, довідкова величина молярної маси одного атома міді дорівнює:

$$m_{\mu(Cu)} = 63,546 \text{ моль/кг},$$

і, отже, маса одного атома міді знайдеться як:

$$m_{Cu} = m_{\mu(Cu)} \cdot a_{\text{ми}} = 63,546 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-24} \approx 1,05521 \cdot 10^{-22} \text{ г},$$

де $a_{\text{ми}} \approx 1,66054 \cdot 10^{-24} \text{ г/моль}$ – атомна одиниця маси.

Шуканий об'єм, що доводиться на один атом, визначиться:

$$V_{Cu} = m_{Cu} / \rho_{Cu} = \frac{1,05521 \cdot 10^{-22}}{8,92 \cdot 10^6} = 1,183 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3,$$

а концентрація атомів міді:

$$n_{Cu} = 1/V_{Cu} = \frac{1}{1,183 \cdot 10^{-29}} = 8,453 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Шуканий період кристалічної ґратки, визначимо виходячи з кристалографічних даних, тобто з того факту, що на одну гранецентровану кристалічну комірку доводиться рівно 4 атома ($n_F = 4$):

$$a = \sqrt[3]{n_F V_{Cu}} = \sqrt[3]{4 \cdot 1,183 \cdot 10^{-29}} = 3,617 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,3617 \text{ нм}.$$

Задача 11. Відстань між найближчими атомами в кристалічній ґратці вольфраму дорівнює $r_W = 0,2737 \text{ нм}$. Відомо, що вольфрам має структуру об'ємноцентрованого куба. Знайти щільність матеріалу.

Розв'язок: По-перше, відзначимо, що на одну об'ємноцентровану комірку доводиться рівно два атома речовини ($n_I = 2$), а, по-друге, перепишемо вихідні дані:

$$r_W = 2R_W,$$

де R_W – радіус атому вольфраму.

Довідкова величина молярної маси одного атома вольфраму дорівнює $m_{\mu(W)} = 183,84 \text{ моль/кг}$, тоді масу одного атому вольфраму запишемо як

$$m_W = m_{\mu(W)} \cdot a_{\text{ми}} = 183,84 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-24} \approx 3,05274 \cdot 10^{-22} \text{ г},$$

де $a_{\text{ми}} \approx 1,66054 \cdot 10^{-24} \text{ г/моль}$ – атомна одиниця маси.

Визначимо обсяг однієї кристалічної комірки вольфраму

$$V_I = \frac{32}{3\sqrt{3}} n_I R_I^3 = \frac{4}{3\sqrt{3}} n_I r_I^3 = \frac{4 \cdot (0,2737 \cdot 10^{-9})^3}{3\sqrt{3}} = 3,1567 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3.$$

Отже, об'єм, що доводиться на один атом, визначиться так

$$V_W = V_I / n_I = \frac{3,1567 \cdot 10^{-28}}{2} = 1,578 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

Остаточно, шукана величина щільності вольфраму визначиться як:

$$\rho_W = m_W / V_W = \frac{3,05274 \cdot 10^{-22}}{1,578 \cdot 10^{-29}} = 1,9341 \cdot 10^7 \text{ г/м}^3 = 1,9341 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3 \approx 19,34 \text{ т/м}^3.$$

Задача 12. Визначити концентрацію вільних електронів в натрії, елементарна ґратка якого є об'ємноцентрованим кубом з ребром $a = 0,428 \text{ нм}$.

Розв'язок: Зауважимо, що на одну об'ємноцентровану комірку доводиться рівно два атома речовини ($n_I = 2$) і обсяг елементарної комірки дорівнює $V_I = a^3$. Отже, концентрація атомів натрію визначиться як $n_{Na} = (V_I / n_I)^{-1} = n_I / a^3$. В силу одновалентності натрію, можемо вважати, що на один атом натрію припадає один електрон і, отже, шукана концентрація електронів знайдеться як:

$$n = n_{Na} = n_I / a^3 = \frac{2}{(0,428 \cdot 10^{-9})^3} = 2,551 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 13. Знаючи атомну масу m_μ , щільність ρ і тип кристалічної ґратки елемента, розрахувати: молярний об'єм (V_μ), сталу ґратки (a), концентрацію атомів (N_a), масу атомів (m_a) і атомний радіус (R_a) для наступних елементів:

Елемент	Полоній (Po)	Літій (Li)	Мідь (Cu)	Германій (Ge)
Тип кубичної ґратки	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>F</i>	алмаз
$m_\mu, \text{г} / \text{моль}$	208,98	6,94	63,54	72,61
$\rho, \text{г} / \text{см}^3$	9,31	0,53	8,96	5,33

Розв'язок: По-перше, згідно з довідковими даними, атомна одиниця маси дорівнює ати $\approx 1,66054 \cdot 10^{-24} \text{ г} / \text{моль}$. По-друге, складемо таблицю відповідності кількості атомів в комірці з типом комірки і відповідності параметра ґратки атомному радіусу:

Елемент	Полоній (Po)	Літій (Li)	Мідь (Cu)	Германій (Ge)
Число атомів в комірці, k	$k = n_P = 1$	$k = n_I = 2$	$k = n_F = 4$	$k = n_C = 8$
Атомний радіус, R_a	$a/2$	$\sqrt{3}a/4$	$\sqrt{2}a/4$	$\sqrt{3}a/8$

Розглянемо в деталях розрахунок лише для міді, а інші випадки розрахуємо за аналогією. Визначимо шуканий молярний об'єм міді:

$$V_{\mu(\text{Cu})} = m_{\mu(\text{Cu})} / \rho_{\text{Cu}} = \frac{63,54}{8,96 \cdot 10^6} = 7,091 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 7,091 \text{ см}^3 / \text{моль},$$

Визначимо шукану масу одного атома міді:

$$m_{\text{Cu}} = m_{\mu(\text{Cu})} \cdot \text{ати} = 63,546 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-24} \approx 1,05521 \cdot 10^{-22} \text{ г}.$$

Шуканий об'єм на один атом, визначиться:

$$V_{\text{Cu}} = m_{\text{Cu}} / \rho_{\text{Cu}} = \frac{1,05521 \cdot 10^{-22}}{8,96 \cdot 10^6} = 1,1776 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3,$$

а концентрація атомів міді:

$$n_{\text{Cu}} = 1/V_{\text{Cu}} = \frac{1}{1,1776 \cdot 10^{-29}} = 8,492 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Шуканий період кристалічної ґратки міді, визначимо виходячи з кристалографічних даних:

$$a = \sqrt[3]{kV_{\text{Cu}}} = \sqrt[3]{4 \cdot 1,1776 \cdot 10^{-29}} = 3,611 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 0,3611 \text{ нм},$$

і, відповідно, шуканий атомний радіус визначимо як:

$$R_{\text{Cu}} = \frac{\sqrt{2}}{4} a = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 0,3611 = 0,1277 \text{ нм}.$$

Розрахунки для інших елементів наведені в таблиці:.

Елемент	Po	Li	Cu	Ge
Молярний об'єм, $\text{см}^3 / \text{моль}$	22,447	13,094	7,091	13,623
Маса одного атома, г	$3,47020 \cdot 10^{-22}$	$1,15241 \cdot 10^{-23}$	$1,05521 \cdot 10^{-22}$	$1,20572 \cdot 10^{-22}$
Концентрація атомів, см^{-3}	$2,683 \cdot 10^{28}$	$4,599 \cdot 10^{28}$	$8,492 \cdot 10^{28}$	$4,421 \cdot 10^{28}$
Стала ґратки, нм	0,3340	0,3516	0,3611	0,5656
Атомний радіус, нм	0,1670	0,1523	0,1277	0,1225

Розділ 2. Статистика електронів і дірок в напівпровідниках

Задача 1. Скільки електронів знаходиться на рівні Фермі у власному напівпровіднику? Як впливає температура на положення цього рівня?

Розв'язок: У власному напівпровіднику $n = p = n_i$ та рівень Фермі для такого напівпровідника:

$$F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_V}{N_C},$$

і при $T = 0 \text{ K}$ формально отримаємо

$$F = \frac{E_C + E_V}{2} = -\frac{E_g}{2},$$

тобто рівень Фермі знаходиться посередині забороненої зони.

Підставимо цей вираз у функцію розподілу Фермі-Дірака $f = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}$,

отримаємо

$$f|_{T=0\text{K}} = \lim_{T \rightarrow 0} \left(e^{(1/2(E_C+E_V)-1/2(E_C+E_V)-1/2(k_B T) \ln N_V/N_C)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \lim_{T \rightarrow 0} \left(e^{1/2 \ln N_V/N_C} + 1 \right)^{-1}.$$

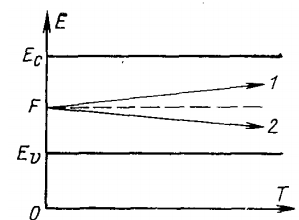
Врахуємо також, що при наближенні до температури абсолютного нуля щільності станів в кожній із зон наближується до нуля, тобто

$$\lim_{T \rightarrow 0} N_C = 0 \text{ и } \lim_{T \rightarrow 0} N_V = 0, \text{ причому } \lim_{T \rightarrow 0} N_V/N_C = \lim_{T \rightarrow 0} N_C/N_V = 1.$$

Отже, ймовірність заповнення рівня Фермі у власному напівпровіднику дорівнює

$$f|_{T=0\text{K}} = \lim_{T \rightarrow 0} \left(e^{1/2 \ln N_V/N_C} + 1 \right)^{-1} = \lim_{N_V/N_C \rightarrow 1} \left(e^{1/2 \ln N_V/N_C} + 1 \right)^{-1} = \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}.$$

Залежність рівня Фермі у власному напівпровіднику приведена на рисунку. У разі $N_V = N_C$ його положення не залежить від температури і рівень Фермі лежить в середині забороненої зони (пунктирна лінія на рис.). У разі $N_V > N_C$ рівень Фермі лінійно зміщується до дна зони провідності, тоді в разі $N_V < N_C$ – до стелі валентної зони (криві 1 і 2 на наведеному рисунку відповідно).



Задача 2. Довести, що середня енергія вільних електронів в металі поблизу $T = 0 \text{ K}$ становить $3/5$ енергії Фермі.

Доказ: Відомо, що число квантових станів (фазових комірок) на одиницю об'єму, який займає газ квантових частинок дорівнює

$$dZ = 4\pi h^{-3} p^2 dp,$$

де, h – стала Планка, p – імпульс квантової частинки.

Тоді, у випадку електронного газу, тобто газу, що складається з ферміонів з масою спокою рівною m_0 , енергія електрона визначиться як $E = p^2/2m_0$ і, відповідно, імпульс – $p = \sqrt{2m_0 E}$.

Приріст імпульсу електрона знайдемо у вигляді:

$$dp = (dp/dE) \cdot dE = \sqrt{m_0/2E} dE.$$

Використовуючи знайдене, визначимо число квантових станів:

$$dZ = 2\pi (2m_0)^{3/2} h^{-3} \sqrt{E} dE.$$

З іншого боку, при тій же температурі, всі енергетичні рівні нижче рівня Фермі зайняті, тобто на одні енергетичний рівень доводиться по два електрона. Отже, концентрація електронів знайдеться як:

$$dn = 2dZ = 4\pi (2m_0)^{3/2} h^{-3} \sqrt{E} dE,$$

а загальна концентрація буде дорівнювати:

$$n = \int_0^F 4\pi(2m_0)^{3/2} h^{-3} \sqrt{E} dE = \frac{8}{3} \pi (2m_0)^{3/2} h^{-3} F^{3/2}.$$

З отриманого виразу визначимо енергію рівня Фермі: $F = \frac{h^2}{8m_0} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}.$

Тоді визначимо середню енергію вільних електронів:

$$\langle E \rangle = n^{-1} \int_0^F E dn(E) = n^{-1} \int_0^F 4\pi(2m_0)^{3/2} h^{-3} E^{3/2} dE = \frac{3}{5} F,$$

Що і треба було довести.

Задача 3. Визначити ймовірність заповнення електронами енергетичного рівня в металі, розташованого на $10 k_B T$ вище рівня Фермі.

Розв'язок: Функція розподілу Фермі–Дірака має вигляд:

$$f = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1},$$

де E – енергія ферміона, k_B – стала Больцмана та T – температура. Відповідно до умов завдання отримаємо вираз для E :

$$E = 10k_B T + F,$$

підставляючи який в функцію Фермі–Дірака, отримаємо шукану ймовірність:

$$f = \left(e^{(10k_B T + F - F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{10} + 1 \right)^{-1} \approx 4,54 \cdot 10^{-5}.$$

Задача 4. Визначити, як і у скільки разів зміниться ймовірність заповнення електронами в металі енергетичного рівня, розташованого на $0,1 \text{ eV}$ вище рівня Фермі, якщо температуру металу підвищити від $T_1 = 300 \text{ K}$ до $T_2 = 1000 \text{ K}$.

Розв'язок: Згідно з умовами задачі енергія ферміона визначається як

$$E = 0,1 \cdot q + F.$$

Підставляючи цю енергію в функцію Фермі–Дірака, визначимо функцію ймовірності

$$f = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(0,1 \cdot q + F - F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(0,1 \cdot q)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}.$$

Підставляючи температурні дані, отримаємо, відповідно:

$$p_1 = f|_{T=300 \text{ K}} = \exp\left(\frac{0,1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}\right)^{-1} = 0,02047,$$

$$p_2 = f|_{T=1000 \text{ K}} = \exp\left(\frac{0,1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 1000}\right)^{-1} = 0,2386.$$

Порівнюючи отримані вирази між собою, остаточно отримаємо $p_2/p_1 = \frac{0,2386}{0,02047} = 11,656,$

інакше кажучи, ймовірність заповнення зазначеного рівня при зростанні температури від $T_1 = 300 \text{ K}$ до $T_2 = 1000 \text{ K}$ зросте у 11,656 разів.

Задача 5. Розрахувати положення рівня Фермі і сумарну кінетичну енергію вільних електронів в 1 cm^{-3} срібла, вважаючи, що число вільних електронів дорівнює кількості атомів срібла.

Розв'язок: Перш за все, визначимо довідкову величину щільності срібла так $\rho_{\text{Ag}} = 10,49 \cdot 10^6 \text{ г/м}^3 = 10,49 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$

Далі, довідкова величина молярної маси одного атома срібла дорівнює

$$m_{\mu(\text{Ag})} = 107,8682 \text{ моль/кг}$$

і, отже, маса одного атома срібла знайдеться як

$$m_{\text{Ag}} = m_{\mu(\text{Ag})} \cdot \text{amu} = 107,8682 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-27} \approx 1,791 \cdot 10^{-25} \text{ кг},$$

де $\text{amu} \approx 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ кг/моль}$ – атомна одиниця маси.

Таким чином, після вирівнювання розмірностей, приступимо до визначення концентрації електронів в сріблі, яка згідно з умовами завдання дорівнює числу атомів срібла:

$$n = n_a = \rho_{Ag} / m_{\mu(Ag)} = 10,49 \cdot 10^3 \cdot (1,791 \cdot 10^{-25})^{-1} = 5,8564 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Визначимо шукане положення рівня Фермі

$$F = \frac{h^2}{8m_0} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3} = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 5,8564 \cdot 10^{28}}{\pi} \right)^{2/3} = 8,8105 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 5,4991 \text{ эВ} \approx 5,5 \text{ эВ}.$$

Знаючи положення рівня Фермі, тобто енергію Фермі, визначимо середню енергію вільного електрона

$$E_e = 3/5 F.$$

Виходячи з останнього, визначимо шукану сумарну кінетичну енергію вільних електронів в 1 см^{-3} срібра як

$$E_{\Sigma(e)} = nE_e = 3/5 nF = \frac{3}{5} \cdot 5,8564 \cdot 10^{28} \cdot 8,8105 \cdot 10^{-19} = 30960 \text{ Дж} = 1,9323 \cdot 10^{23} \text{ эВ}.$$

Задача 6. Визначити температуру, при якій ймовірність знаходження електрона з енергією $E = 0,5 \text{ эВ}$ вище рівня Фермі в металі дорівнює $m = n \cdot 100\% = 1\%$.

Розв'язок: Згідно з умовою задачі енергія ферміона визначається як

$$E = n + F,$$

де n – відносна зміщення даного рівня щодо рівня Фермі.

Підставивши цей вираз у функцію розподілу Фермі-Дірака $f = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}$,

отримаємо

$$f = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(n+F-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{n/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}.$$

Вирішуючи отримане рівняння щодо температури, отримаємо остаточно

$$T = \frac{n}{k_B \ln\left(\frac{1-n}{n}\right)} = \frac{m/100}{k_B \ln\left(\frac{100-m}{m}\right)} = \frac{0,01}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot \ln\left(\frac{1-0,01}{0,01}\right)} = \frac{1/100}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot \ln\left(\frac{100-1}{1}\right)} = 1262,7 \text{ К}.$$

Задача 7. Визначити мінімальну довжину хвилі де Бройля для вільних електронів при $T = 0 \text{ К}$ в металі з простою кубічною ґраткою, якщо на кожен атом кристала доводиться один вільний електрон. Період ґратки дорівнює a .

Розв'язок: Довжина хвилі де Бройля пов'язана з її імпульсом співвідношенням

$$\lambda = h/p,$$

отже, мінімальна довжина хвилі буде дорівнювати

$$\lambda_{\min} = h/p_F,$$

де p_F – імпульс Фермі, тобто імпульс електрона при температурі $T = 0 \text{ К}$ або імпульс електрона з енергією рівній енергії Фермі:

$$F = \frac{h^2}{8m_0} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3},$$

де n – концентрація вільних електронів. В силу останнього, вираз для імпульсу набуде вигляду

$$p_F = \sqrt{2m_0 F} = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{1/3}.$$

Оскільки кристалічна ґратка металу є простою кубічною з періодом, рівним a , то концентрація атомів, і відповідно, концентрація електронів n визначається як

$$n = a^{-3}.$$

Тоді отримаємо вираз для імпульсу Фермі у вигляді

$$p_F = \frac{h}{2a} \cdot \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3}.$$

Таким чином, шукана мінімальна довжина хвилі де Бройля вільних електронів:

$$\lambda_{\min} = 2a(\pi/3)^{1/3} \cong 2,03098 \cdot a \approx 2 \cdot a.$$

Задача 8. Обчислити концентрацію вільних електронів в кристалі міді, якщо відомо, що щільність міді дорівнює $8,92 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. При розрахунку вважати, що на кожен атом кристалічної ґратки доводиться один електрон.

Розв'язок: Перш за все, запишемо величину щільності міді як

$$\rho_{\text{Cu}} = 8,92 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 8,92 \cdot 10^6 \text{ г/м}^3 = 8,92 \text{ г/см}^3.$$

Довідкова величина молярної маси одного атома міді дорівнює

$$m_{\mu(\text{Cu})} = 63,546 \text{ моль/кг}$$

тоді, маса одного атома міді знайдеться як

$$m_{\text{Cu}} = m_{\mu(\text{Cu})} \cdot \text{amu} = 63,546 \cdot 1,66054 \cdot 10^{-24} \approx 1,05521 \cdot 10^{-22} \text{ г},$$

де $\text{amu} \approx 1,66054 \cdot 10^{-24} \text{ г/моль}$ – атомна одиниця маси.

Таким чином, після вирівнювання розмірностей, приступимо до визначення концентрації електронів в міді, яка згідно з умовами задачі дорівнює числу атомів міді:

$$n = n_a = \rho_{\text{Cu}} / m_{\mu(\text{Cu})} = 8,92 \cdot (1,05521 \cdot 10^{-22})^{-1} = 8,4533 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3} = 8,4533 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 9. Положення рівня Фермі для алюмінію при $T = 0 \text{ К}$ відповідає енергія $11,7 \text{ эВ}$. Розрахувати число вільних електронів, що припадають на один атом. Ефективну масу електронів провідності прийняти рівною масі вільного електрона.

Розв'язок: Концентрацію вільних електронів визначимо з виразу для енергії Фермі:

$$F = \frac{h^2}{8m_0} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3},$$

тобто

$$n = \frac{8}{3} \pi \left(2m_0 F h^{-2} \right)^{3/2} = \frac{8}{3} \pi \cdot \left(\frac{2 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 11,7 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{(6,6207 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{3/2} = 1,8175 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 10. Яким аналітичним виразом можна описати температурну залежність концентрації електронів в напівпровіднику р-типу на ділянці виснаження акцепторів.

Розв'язок: Відповідно до закону діючих мас

$$n = n_i^2 / p.$$

З іншого боку, в області виснаження домішки

$$p = N_A.$$

Отже, шукане аналітичне вираз набуде вигляду

$$n = n_i^2 / N_A = (n_i(T))^2 / N_A.$$

Задача 11. Знайти положення рівня Фермі у власному Ge при температурі $T = 300 \text{ К}$, якщо відомо, що $\Delta E_g = 0,665 \text{ эВ}$, а ефективні маси густини станів $m_v = 0,388 \cdot m_0$, $m_c = 0,55 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Розв'язок: Положення рівня Фермі у власному напівпровіднику визначається як

$$F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_v}{m_c}$$

або, в разі завдання енергії в одиницях електрон-вольт, як

$$F = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{k_B T}{q} \cdot \ln \frac{m_v}{m_c}.$$

Визначаючи положення рівня Фермі відносно стелі валентної зони, отримаємо

$$F - E_V = \frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{k_B T}{q} \cdot \ln \frac{m_v}{m_c} - E_V = \frac{E_C - E_V}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{k_B T}{q} \cdot \ln \frac{m_v}{m_c} = \Delta E_g + \frac{3}{4} \cdot \frac{k_B T}{q} \cdot \ln \frac{m_v}{m_c}.$$

Остаточно, шукана величина визначиться так

$$F - E_V = 0,665 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \ln \frac{0,388 \cdot m_0}{0,55 \cdot m_0} = 0,3257 \text{ эВ}.$$

Задача 12. Рівень Фермі в напівпровіднику знаходиться на 0,3 эВ нижче дна зони провідності. Яка ймовірність того, що при кімнатній температурі енергетичні рівні, розташовані на $3k_B T$ вище дна зони провідності, зайняті електронами? Яка ймовірність того, що на рівні, розташованому у стелі валентної зони, міститься дірки, якщо ширина забороненої зони напівпровідника $\Delta E_g = 1,1 \text{ эВ}$.

Розв'язок: Згідно з умовами, енергія електрона і рівень Фермі визначаються як

$$E = E_C + 3k_B T \text{ и } F = E_C - \delta E_n = E_C - 0,3.$$

Підставляючи ці величини в функцію Фермі-Дірака для електронів, визначимо шукану ймовірність

$$p_{\delta E_n} = f_n = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(E_C + 3k_B T - (E_C - \delta E_n))/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(3k_B T + \delta E_n)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}.$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо:

$$p_{\delta E_n} = \left(e^{(3 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 - 1,602 \cdot 10^{-19} + 0,3) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} + 1 \right)^{-1} = 4,590 \cdot 10^{-7}.$$

Переходячи до знаходження ймовірності зайнятості рівня поблизу стелі валентної зони дірками, отримаємо

$$E = \lim_{\delta E_p \rightarrow 0} E_V - \delta E_p = E_V.$$

Підставляючи ці величини в функцію Фермі-Дірака для дірок, визначимо шукану ймовірність

$$p_{\delta E_p} = f_p = \left(e^{(F-E)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(E_C - \delta E_n - E_V)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(\Delta E_g - \delta E_n)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}.$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо:

$$p_{\delta E_p} = \left(e^{(1,1 - 0,3) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} + 1 \right)^{-1} = 3,737 \cdot 10^{-14}.$$

Задача 13. Визначити ймовірність заповнення електронами енергетичного рівня, розташованого на $10 k_B T$ вище рівня Фермі. Як зміниться ймовірність заповнення цього рівня електронами, якщо температуру збільшити в 2 рази?

Розв'язок: Згідно з умовами, енергія даного рівня визначається як

$$E = F + 10k_B T_1.$$

Підставивши отриманий вираз у функцію Фермі-Дірака, отримаємо шукану ймовірність

$$p_{T_1} = f_n = \left(e^{(F + 10k_B T_1 - F)/(k_B T_1)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{10} + 1 \right)^{-1} \approx 4,54 \cdot 10^{-5}.$$

Визначимо ймовірність заповнення того ж рівня при підвищенні температури в 2 рази, тобто при температурі $T_2 = 2T_1$:

$$p_{T_2} = f_n = \left(e^{(F + 10k_B T_1 - F)/(k_B T_2)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(10k_B T_1)/(k_B 2T_1)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^5 + 1 \right)^{-1} \approx 6,693 \cdot 10^{-3}.$$

Шукана зміна ймовірності заповнення даного рівня складе $p_{T_2} / p_{T_1} = \frac{6,693 \cdot 10^{-3}}{4,54 \cdot 10^{-5}} = 147$.

Задача 14. Рівень Фермі напівпровідника знаходиться на 0,01 эВ вище стелі валентної зони. Розрахувати ймовірність появи дірки на верхньому рівні валентної зони при $T_1 = 300 \text{ K}$ і при $T_2 = 50 \text{ K}$. Розрахувати ймовірність знаходження електрона на дні зони провідності при $T = 300 \text{ K}$ при ширині забороненої зони напівпровідника $\Delta E_g = 0,665 \text{ эВ}$.

Розв'язок: По-перше, відповідно до умов завдання, необхідно визначити ймовірність зайнятості діркою рівня з енергією

$$E = \lim_{\delta E_p \rightarrow 0} E_V - \delta E_p = E_V,$$

Причому положення рівня Фермі задано так

$$F = E_V + \varepsilon_p = E_V + 0,01.$$

Підставляючи ці величини в функцію Фермі-Дірака для дірок, визначимо шукану ймовірність

$$P_{\delta E_p} = f_p = \left(e^{(F-E)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(E_V + \varepsilon_p - E_V)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{\varepsilon_p/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}.$$

Підставляючи вихідні дані, визначимо шукані ймовірності

$$P_{\delta E_p} \Big|_{T=300 K} = \left(e^{0,01 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} + 1 \right)^{-1} = 0,40467,$$

$$P_{\delta E_p} \Big|_{T=50 K} = \left(e^{0,01 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 50)} + 1 \right)^{-1} = 0,08957.$$

По-друге, відповідно до умов завдання, необхідно визначити ймовірність знаходження електрона на дні зони провідності

$$E = \lim_{\delta E_n \rightarrow 0} E_C + \delta E_n = E_C.$$

Підставляючи ці величини в функцію Фермі-Дірака для електронів, визначимо шукану ймовірність

$$P_{\delta E_n} = f_n = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(E_C - (E_V + \varepsilon_p))/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(\Delta E_g - \varepsilon_p)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1}.$$

Підставляючи вихідні дані, визначимо шукані ймовірності

$$P_{\delta E_n} \Big|_{T=300 K} = \left(e^{(0,665 - 0,01) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} + 1 \right)^{-1} = 8,3626 \cdot 10^{-12},$$

$$P_{\delta E_n} \Big|_{T=50 K} = \left(e^{(0,665 - 0,01) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 50)} + 1 \right)^{-1} = 3,4203 \cdot 10^{-67}.$$

Задача 15. Визначити, на скільки різняться ймовірності заповнення електронами нижнього рівня зони провідності у власному германії і власному кремнії при $T_1 = 300 K$ і при $T_2 = 100 K$.

Розв'язок: У власному напівпровіднику ширина забороненої зони дорівнює

$$\Delta E_g = E_C - E_V,$$

а енергія шуканого рівня складе

$$E = E_C.$$

Також врахуємо, що енергія Фермі не залежить від температури, або, інакше кажучи, ефективні маси густини станів зон валентної і провідності рівні

$$F = \lim_{m_v \rightarrow m_c} \left(\frac{E_C + E_V}{2} + \frac{3}{4} k_B T \ln \frac{m_v}{m_c} \right) = \frac{E_C + E_V}{2}.$$

Підставляючи ці величини в функцію Фермі-Дірака для електронів, визначимо шукану ймовірність

$$P_{E_C} = f_n = \left(e^{(E-F)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(E_C - E_C/2 - E_V/2)/(k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{(E_C - E_V)/(2k_B T)} + 1 \right)^{-1} = \left(e^{\Delta E_g/(2k_B T)} + 1 \right)^{-1}.$$

Запишемо вирази для ймовірностей заповнення електронами нижнього рівня зони провідності відповідно до вихідних даних так

$$P_{E_C^{Ge}} = e^{-\Delta E_g^{Ge}/(2k_B T)} \quad \text{і} \quad P_{E_C^{Si}} = e^{-\Delta E_g^{Si}/(2k_B T)}.$$

З вище наведеного, слід, що шукане співвідношення провідностей набуде вигляду

$$k = \frac{P_{E_C^{Ge}}}{P_{E_C^{Si}}} = e^{\frac{\Delta E_g^{Si} - \Delta E_g^{Ge}}{2k_B T}}.$$

Підставляючи вихідні дані, визначимо шукані співвідношення ймовірностей

$$k \Big|_{T=300 K} = e^{(1,12 - 0,665) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300)} \approx 6,635 \cdot 10^3,$$

$$k \Big|_{T=100 K} = e^{(1,12 - 0,665) \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} / (2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 100)} \approx 2,92 \cdot 10^{11}.$$

Задача 16. Визначити положення рівня Фермі при $T = 300 K$ в кристалах германію, легуваних миш'яком до концентрації $N_A = 0,5 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}$.

Розв'язок: У дірковому напівпровіднику положення рівня Фермі відносно стелі валентної зони (в одиницях електрон-вольт) задається так

$$F - E_V = \frac{k_B T}{q} \ln \frac{N_V}{N_A},$$

де $N_V = 2(2\pi m_v k_B T h^{-2})^{3/2}$ – щільність станів у валентній зоні, $m_v = 0,388 \cdot m_0$ – ефективна маса густини станів валентної зони, m_0 – маса вільного електрона. Обчислюючи величину

$$N_V = 2 \left(2\pi \cdot 0,388 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (6,6207 \cdot 10^{-34})^{-2} \right)^{3/2} = 6,065 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$$

і підставляючи це значення у вихідну формулу, визначимо шукане положення рівня Фермі:

$$F - E_V = \frac{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,602 \cdot 10^{-19}} \ln \frac{6,065 \cdot 10^{24}}{0,5 \cdot 10^{23}} = 0,124 \text{ эВ}.$$

Задача 17. Обчислити власну концентрацію носіїв заряду в кремнії при $T = 300 \text{ К}$, якщо ширина його забороненої зони $\Delta E_g = 1,12 \text{ эВ}$, а ефективні маси густини станів $m_v = 0,56 \cdot m_0$, $m_c = 1,05 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Розв'язок: Як відомо, концентрація власних носіїв заряду визначається так

$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{\frac{-\Delta E_g}{2k_B T}}$, де $N_C = 2(2\pi m_c k_B T h^{-2})^{3/2}$ та $N_V = 2(2\pi m_v k_B T h^{-2})^{3/2}$ – щільності станів відповідно в зоні провідності і у валентній зоні. Розрахуємо ці величини:

$$N_C = 2 \left(2\pi \cdot 1,05 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (6,6207 \cdot 10^{-34})^{-2} \right)^{3/2} = 2,700 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3},$$

$$N_V = 2 \left(2\pi \cdot 0,56 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (6,6207 \cdot 10^{-34})^{-2} \right)^{3/2} = 1,052 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Визначимо потрібну концентрацію власних носіїв заряду

$$n_i = \sqrt{2,700 \cdot 10^{25} \cdot 1,052 \cdot 10^{25}} e^{\frac{-1,12 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 6,59 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 18. Рівень Фермі в кремнії при $T = 300 \text{ К}$ розташований на $0,2 \text{ эВ}$ нижче дна зони провідності. Розрахувати рівноважну концентрацію електронів і дірок в цьому напівпровіднику, якщо $\Delta E_g = 1,12 \text{ эВ}$, а ефективні маси густини станів $m_v = 0,56 \cdot m_0$, $m_c = 1,05 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Розв'язок: Перш за все, визначимо величину концентрації власних носіїв заряду в кремнії

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{\frac{-\Delta E_g}{2k_B T}},$$

де $N_C = 2(2\pi m_c k_B T h^{-2})^{3/2}$ та $N_V = 2(2\pi m_v k_B T h^{-2})^{3/2}$ – щільності станів відповідно в зоні провідності і у валентній зоні. Розрахуємо ці величини:

$$N_C = 2 \left(2\pi \cdot 1,05 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (6,6207 \cdot 10^{-34})^{-2} \right)^{3/2} = 2,700 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3},$$

$$N_V = 2 \left(2\pi \cdot 0,56 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (6,6207 \cdot 10^{-34})^{-2} \right)^{3/2} = 1,052 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Отже, концентрація власних носіїв заряду буде дорівнює

$$n_i = \sqrt{2,700 \cdot 10^{25} \cdot 1,052 \cdot 10^{25}} e^{\frac{-1,12 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 6,59 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Згідно з умовами завдання, положення рівня Фермі задано так

$$E_C - F = 0,2 \text{ эВ}.$$

Остання величина (в одиницях електрон-вольт), з іншого боку, визначається так

$$E_C - F = \frac{k_B T}{q} \ln \frac{N_C}{N_D}.$$

З останнього виразу визначимо концентрацію донорів:

$$N_D = N_C e^{\frac{-(E_C - F)q}{k_B T}} = 2,700 \cdot 10^{25} e^{\frac{-0,21 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 1,18 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Вважаючи, що при даній температурі все домішки іонізовані, і з огляду на те, що $N_D \approx n_i$, визначимо шукану концентрацію рівноважних електронів так $n = N_D = 1,18 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$.

Шукану концентрацію рівноважних дірок визначимо за законом діючих мас

$$p = n_i^2 / n = \frac{(6,59 \cdot 10^{15})^2}{1,18 \cdot 10^{22}} = 3,68 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}.$$

Задача 19. Рівень Фермі в германії при $T = 300 \text{ K}$ знаходиться на $0,1 \text{ eV}$ вище стелі валентної зони. Розрахувати рівноважну концентрацію електронів і дірок в цьому матеріалі, якщо $\Delta E_g = 0,665 \text{ eV}$, а ефективні маси густини станів $m_v = 0,388 \cdot m_0$, $m_c = 0,55 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Розв'язок: Перш за все, визначимо величину концентрації власних носіїв заряду в германії

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{\frac{-\Delta E_g}{2k_B T}},$$

де $N_C = 2(2\pi m_c k_B T h^{-2})^{3/2}$ та $N_V = 2(2\pi m_v k_B T h^{-2})^{3/2}$ – щільності станів відповідно в зоні провідності і у валентній зоні. Розрахуємо ці величини:

$$N_C = 2 \left(2\pi \cdot 0,55 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (6,6207 \cdot 10^{-34})^{-2} \right)^{3/2} = 1,0236 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3},$$

$$N_V = 2 \left(2\pi \cdot 0,388 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (6,6207 \cdot 10^{-34})^{-2} \right)^{3/2} = 6,0648 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}.$$

Отже, концентрація власних носіїв заряду буде дорівнює

$$n_i = \sqrt{1,0236 \cdot 10^{25} \cdot 6,0648 \cdot 10^{24}} e^{\frac{-0,665 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 2,045 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Згідно з умовами завдання, положення рівня Фермі задано співвідношенням:

$$F - E_V = 0,1 \text{ eV}.$$

Остання величина (в одиницях електрон-вольт), з іншого боку, визначається як

$$F - E_V = \frac{k_B T}{q} \ln \frac{N_V}{N_A}.$$

З останнього виразу визначимо концентрацію акцепторів:

$$N_A = N_V e^{\frac{-(F - E_V)q}{k_B T}} = 6,0648 \cdot 10^{24} e^{\frac{-0,1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 1,267 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Вважаючи, що при даній температурі все домішки іонізовані, і з огляду на те, що $N_A \approx n_i$, визначимо шукану концентрацію рівноважних дірок

$$p = N_A = 1,267 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Шукану концентрацію рівноважних електронів визначимо за законом діючих мас

$$n = n_i^2 / p = \frac{(2,045 \cdot 10^{19})^2}{1,267 \cdot 10^{23}} = 3,30 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 20. У власному германії ширина забороненої зони при $T = 300 \text{ K}$ дорівнює $\Delta E_g = 0,665 \text{ eV}$. На скільки треба підвищити температуру, щоб число електронів в зоні провідності збільшилася в 2 рази? Температурним зміною ефективною щільності станів для електронів і дірок при розрахунку знехтувати.

Розв'язок: Величини концентрацій власних носіїв заряду при двох різних температурах визначимо як:

$$n_{i1} = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T_1}} \text{ та } n_{i2} = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T_2}}$$

де $N_C = 2(2\pi m_C k_B T h^{-2})^{3/2}$ та $N_V = 2(2\pi m_V k_B T h^{-2})^{3/2}$ – щільності станів відповідно в зоні провідності і у валентній зоні.

Нехтуючи, згідно з умовами завдання, температурної залежності щільності станів, знайдемо відношення концентрацій власних носіїв заряду при двох різних температурах:

$$k = n_{i2}/n_{i1} = e^{\frac{\Delta E_g(T_2 - T_1)}{2k_B T_1 T_2}}.$$

З цього виразу визначимо температуру T_2

$$T_2 = \frac{\Delta E_g T_1}{\Delta E_g - 2 \ln(k) k_B T_1},$$

і шукане підвищення температури визначиться як

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\Delta E_g T_1}{\Delta E_g - 2 \ln(k) k_B T_1} - T_1 = \frac{0,665 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 300}{0,665 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} - 2 \cdot \ln(2) \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300} - 300 = 17,09^\circ \text{C} \approx 17^\circ \text{C}.$$

Задача 21. При кімнатній температурі в германії ширина забороненої зони $\Delta E_g = 0,665$ eВ, а власна концентрація носіїв заряду $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. У скільки разів зміниться власна концентрація n_i , якщо температуру підвищити на 200°C . Ефективні маси густини станів $m_V = 0,388 \cdot m_0$, $m_C = 0,55 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного електрона. Коефіцієнт температурного зміни ширини забороненої зони $b = -3,9 \cdot 10^{-4} \text{ eВ} / \text{K}$.

Розв'язок: Перш за все, визначимо ширину забороненої зони германію при температурі 0 K :

$$\Delta E_{g0} = \Delta E_g|_T - bT = 0,665 - (-3,9 \cdot 10^{-4} \cdot 300) = 0,782 \text{ eВ}.$$

Концентрації власних носіїв заряду при температурах T_1 і T_2 визначимо так

$$n_{i1} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_C m_V)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{2k_B T_1}\right)$$

та

$$n_{i2} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_C m_V)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{2k_B T_2}\right),$$

де ΔE_{g0} – ширина забороненої зони напівпровідника при 0 K , $k_E = -b$ – коефіцієнт температурного зменшення ширини забороненої зони, k_B – стала Больцмана, h – стала Планка, m_C, m_V – ефективні маси густини станів електронів і дірок відповідно. Ділячи другу величину на першу, знайдемо вираз для знаходження шуканого зміни концентрації власних носіїв заряду

$$\frac{n_{i2}}{n_{i1}} = \frac{4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_C m_V)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{2k_B T_2}\right)}{4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_C m_V)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{2k_B T_1}\right)} = \frac{T_2^{3/2}}{T_1^{3/2}} \exp\left(\frac{\Delta E_{g0} (T_2 - T_1)}{2k_B T_1 T_2}\right).$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо наступну числову відповідь

$$\frac{n_{i2}}{n_{i1}} = \frac{500^{3/2}}{300^{3/2}} \exp\left(\frac{0,782 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (500 - 300)}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 500}\right) = 912.$$

Задача 22. Обчислити власну концентрацію носіїв заряду в арсеніді галію при $T = 300 \text{ K}$ і 500 K , якщо ефективні щільності станів $m_V = 0,48 \cdot m_0$, $m_C = 0,067 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного

електрона, а температурне зміна ширини забороненої зони підпорядковується виразу $\Delta E_g(T) = 1,522 - 5,8 \cdot 10^{-4} T^2 / (T + 300)$.

Розв'язок: Концентрація власних носіїв заряду визначається так

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{\frac{-\Delta E_g}{2k_B T}},$$

де $N_C = 2(2\pi m_C k_B T h^{-2})^{3/2}$ і $N_V = 2(2\pi m_V k_B T h^{-2})^{3/2}$ – щільності станів відповідно в зоні провідності і у валентній зоні.

Розкриваючи всі коефіцієнти, отримаємо вираз для концентрації власних носіїв в арсеніді галію в явному вигляді:

$$n_i = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T^3 (m_C m_V)^{3/2}} e^{\frac{q(1,522 - 5,8 \cdot 10^{-4} T^2 / (T + 300))}{2k_B T}}.$$

Підставляючи вихідні дані визначимо концентрацію власних носіїв заряду в арсеніді галію

$$n_i|_{T=300K} = \frac{4\sqrt{2\pi^3 (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300)^3 (0,067 \cdot 0,48)^{3/2} (9,1094 \cdot 10^{-31})^3}}{(6,6207 \cdot 10^{-34})^3} e^{\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (1,522 - 5,8 \cdot 10^{-4} \cdot 300^2 / (300 + 300))}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 1,702 \cdot 10^{12} \text{ м}^{-3},$$

$$n_i|_{T=500K} = \frac{4\sqrt{2\pi^3 (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 500)^3 (0,067 \cdot 0,48)^{3/2} (9,1094 \cdot 10^{-31})^3}}{(6,6207 \cdot 10^{-34})^3} e^{\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (1,522 - 5,8 \cdot 10^{-4} \cdot 500^2 / (500 + 300))}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 500}} = 7,216 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 23. Визначити, як зміниться концентрація дірок в германії, що містить дрібні донори в концентрації $N_D = 1 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$, при його нагріванні від 300 до 400 К.

Розв'язок: Згідно з довідковими даними, коефіцієнт температурного зміни ширини забороненої зони германію дорівнює $b = -3,9 \cdot 10^{-4} \text{ эВ/К}$, а ширина забороненої зони при 300 К дорівнює $\Delta E_{g0} = 0,665 \text{ эВ}$. Визначимо ширину забороненої зони германію при температурі 0 К:

$$\Delta E_{g0} = \Delta E_g|_T - bT = 0,665 - (-3,9 \cdot 10^{-4} \cdot 300) = 0,782 \text{ эВ}.$$

Концентрації власних носіїв заряду при температурах T_1 і T_2 визначимо так

$$n_{i1} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_C m_V)^{3/2}} e^{\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{2k_B T_1}}$$

і

$$n_{i2} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_C m_V)^{3/2}} e^{\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{2k_B T_2}},$$

де ΔE_{g0} – ширина забороненої зони напівпровідника при 0 К, $k_E = -b$ – коефіцієнт температурного зменшення ширини забороненої зони, k_B – стала Больцмана, h – стала Планка, m_C, m_V – ефективні маси густини станів електронів і дірок відповідно.

Шукані концентрації дірок визначаються за законом діючих мас:

$$p_1 = \frac{n_{i1}^2}{N_D} = \frac{32\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_C m_V)^{3/2}}{h^6 N_D} e^{\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{k_B T_1}}$$

і

$$p_2 = \frac{n_{i2}^2}{N_D} = \frac{32\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_C m_V)^{3/2}}{h^6 N_D} e^{\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{k_B T_2}}.$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо

$$p_1 = \frac{32\pi^3 (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300)^3 (0,55 \cdot 0,388)^{3/2} (9,1094 \cdot 10^{-31})^3}{(6,6207 \cdot 10^{-34})^6 \cdot 1 \cdot 10^{22}} e^{\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (0,782 - 3,9 \cdot 10^{-4} \cdot 300)}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 4,259 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$$

і

$$p_2 = \frac{32\pi^3 (1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 400)^3 (0,55 \cdot 0,388)^{3/2} (9,1094 \cdot 10^{-31})^3}{(6,6207 \cdot 10^{-34})^6 \cdot 1 \cdot 10^{22}} e^{-\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (0,782 - 3,9 \cdot 10^{-4} \cdot 400)}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 400}} = 1,929 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

Визначимо шукану величину відносини концентрацій неосновних носіїв заряду при двох різних температурах, для чого поділимо другу величину на першу

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1,929 \cdot 10^{20}}{4,259 \cdot 10^{16}} = \frac{T_2^3}{T_1^3} e^{\frac{\Delta E_{g0}(T_2 - T_1)}{k_B T_1 T_2}} = \frac{400^3}{300^3} e^{-\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,782 \cdot (400 - 300)}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 400}} = 4530.$$

Задача 24. Обчислити, у скільки разів відрізняються рівноважні концентрації дірок при кімнатній температурі в кристалах кремнію і арсеніду галію, що мають однакову концентрацію донорних домішок $N_D = 1 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, якщо ширина забороненої зони в кремнії $\Delta E_{g(Si)} = 1,12 \text{ эВ}$, а ефективні маси густини станів $m_{V(Si)} = 0,56 \cdot m_0$, $m_{C(Si)} = 1,05 \cdot m_0$, в арсеніді галію $\Delta E_{g(GaAs)} = 1,38 \text{ эВ}$, а ефективні маси густини станів $m_{V(GaAs)} = 0,48 \cdot m_0$, $m_{C(GaAs)} = 0,07 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Вказівка: Треба використати формули попередньої задачі.

Розв'язок: Концентрація власних носіїв заряду визначається так

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} e^{-\frac{\Delta E_g}{2k_B T}},$$

де $N_C = 2(2\pi m_C k_B T h^{-2})^{3/2}$ і $N_V = 2(2\pi m_V k_B T h^{-2})^{3/2}$ – щільності станів відповідно в зоні провідності і у валентній зоні.

Розкриваючи всі коефіцієнти, отримаємо вирази для концентрації власних носіїв в кремнії і арсеніді галію в явному вигляді:

$$n_{i(Si)} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T^3 (m_{C(Si)} m_{V(Si)})^{3/2}} e^{-\frac{\Delta E_{g(Si)}}{2k_B T}},$$

$$n_{i(GaAs)} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T^3 (m_{C(GaAs)} m_{V(GaAs)})^{3/2}} e^{-\frac{\Delta E_{g(GaAs)}}{2k_B T}}.$$

Шукані концентрації дірок визначаються за законом діючих мас:

$$p_{(Si)} = \frac{n_{i(Si)}^2}{N_D} = \frac{32\pi^3 k_B^3 T^3 (m_{C(Si)} m_{V(Si)})^{3/2}}{h^6 N_D} e^{-\frac{\Delta E_{g(Si)}}{k_B T}}$$

і

$$p_{(GaAs)} = \frac{n_{i(GaAs)}^2}{N_D} = \frac{32\pi^3 k_B^3 T^3 (m_{C(GaAs)} m_{V(GaAs)})^{3/2}}{h^6 N_D} e^{-\frac{\Delta E_{g(GaAs)}}{k_B T}}.$$

Шукане відмінність визначиться так

$$\frac{p_{(Si)}}{p_{(GaAs)}} = \frac{m_{C(Si)}^{3/2} m_{V(Si)}^{3/2}}{m_{C(GaAs)}^{3/2} m_{V(GaAs)}^{3/2}} e^{\frac{\Delta E_{g(GaAs)} - \Delta E_{g(Si)}}{k_B T}} = \left(\frac{1,05 \cdot 0,56}{0,07 \cdot 0,48}\right)^{3/2} e^{-\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (1,38 - 1,12)}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 1,692 \cdot 10^6.$$

Розділ 3 Кінетичні явища в напівпровідниках

Розділ 3.1 Електропровідність

Задача 1. При напруженості електричного поля $E = 100 \text{ В/м}$ щільність струму через напівпровідник становить $j = 6 \cdot 10^4 \text{ А/м}^2$. Визначити концентрацію електронів провідності в напівпровіднику, якщо їх рухливість $\mu_n = 0,375 \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$. Дірковою складовою струму знехтувати.

Розв'язок: Оскільки нам відома щільність струму через напівпровідник, то

$$j = \sigma E = qn\mu_n E.$$

Звідки

$$n = j(q\mu_n E)^{-1} = 6 \cdot 10^4 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,375 \cdot 100)^{-1} = 9,986 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \approx 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 2. Оцінити теплову та дрейфову швидкості електронів при $T = 300 \text{ К}$ у германії n -типу з концентрацією донорів $N_D = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, якщо щільність струму через зразок $j = 10^4 \text{ А/м}^2$, а ефективна маса електронів провідності $m_n = 0,12 m_0$.

Розв'язок: Оскільки поведінка електронів в напівпровідниках підпорядковується статистиці Максвелла-Больцмана, то до них може бути застосована і гіпотеза про молекулярні гази:

$$m_n v_T^2 / 2 = 3k_B T / 2.$$

Звідки і знайдемо теплову швидкість

$$v_T = \sqrt{3k_B T / m_n} = \sqrt{3 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 / (0,12 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31})} = 3,3715 \cdot 10^5 \text{ м/с} \approx 3,37 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Дрейфову швидкість електронів знайдемо з рівняння для щільності струму ($j = qn v_d$):

$$v_d = j(qn)^{-1} = 10^4 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{22})^{-1} = 6,25 \text{ м/с}.$$

Задача 3. Визначити, у скільки разів дрейфова швидкість електронів у германії n -типу з $N_D = 10^{22} \text{ м}^{-3}$ відрізняється від дрейфової швидкості електронів в міді при пропущенні через них електричного струму однаковою щільності $j = 10^4 \text{ А/м}^2$. Поясніть причину відмінності швидкостей.

Розв'язок: Дрейфову швидкість електронів знайдемо з рівняння для щільності струму ($j = qn v_d$), яка для германію n -типу становить

$$v_d^{Ge} = j(qn)^{-1} = 10^4 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{22})^{-1} = 6,242 \text{ м/с},$$

а для міді

$$v_d^{Cu} = j(qn^{Cu})^{-1} = 10^4 \cdot (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 8,45 \cdot 10^{28})^{-1} = 7,387 \cdot 10^{-7} \text{ м/с},$$

Шукане співвідношення дрейфової швидкості електронів в германії до дрейфової швидкості електронів в міді:

$$v_d^{Ge} / v_d^{Cu} = 6,242 / 7,387 \cdot 10^{-7} = 8,4499 \cdot 10^6 \approx 8,45 \cdot 10^6.$$

Така відмінність у величинах дрейфових швидкостей пояснюється тим фактом, що в металі неможливо створення великих електричних полів, а останнє твердження обумовлено високою концентрацією електронів провідності.

Задача 4. Визначити питомий опір напівпровідника n -типу, якщо концентрація електронів провідності в ньому дорівнює $n = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, а їх рухливість $\mu_n = 0,5 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Оскільки концентрацією дірок можна знехтувати, то шукана величина питомого опору визначиться так:

$$\rho = (qn\mu_n)^{-1} = (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{22} \cdot 0,5)^{-1} = 1,248 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м} \approx 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Задача 5. Що розуміється під розсіюванням носіїв заряду в напівпровідниках, які основні механізми цього явища? Оцінити середній час і довжину вільного пробігу носіїв заряду при температурі $T = 300 \text{ K}$, якщо їх рухливість $\mu = 0,1 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, а ефективна маса $m = 0,12 m_0$?

Відповідь: У строго періодичному полі кристалічної ґратки носіїв заряду рухається уздовж всього кристала з збереженням квазіімпульсу, тобто з постійною енергією, а значить і з постійною швидкістю. Іншими словами, строго періодична кристалічна ґратка не перешкоджає (пручається) руху електрона, або, інакше, в ідеальному кристалі, електрон рухається як вільна частинка. Розглядаючи електрон як електронну хвилю, можна стверджувати, що електронні хвилі в ідеальному кристалі не розсіюються.

Якщо ж кристал не ідеальний, то в ньому будуть спостерігатися відхилення від строгої періодичності кристалічної ґратки, а значить, носіїв заряду, проходячи поблизу таких збурень потенціалу, буде змінювати величину свого квазіімпульсу, а значить і енергію. Зміна ж енергії електрона означає зміну швидкості. Іншими словами, в недосконалому кристалі, кристалічна ґратка перешкоджає (пручається) руху електрона або, інакше, на будь-які порушення ідеальності структури кристалічної ґратки відбувається розсіювання електронних хвиль.

У реальних кристалах, потенційне поле кристалічної ґратки завжди спотворено тепловими коливаннями атомів, молекул, іонів і наявністю в ній різного роду дефектів. Розсіювання електронних хвиль на цих неоднорідностях структури кристалічної ґратки і є фізичною причиною, яка зумовлює електричний опір речовини при проходженні через нього електричного струму.

Основні види розсіювання такі: на теплових коливаннях кристалічної ґратки (зокрема на акустичних і оптичних фононах), на атомах домішки, на іонах домішок, на дислокаціях, на інших центрах розсіювання.

Розв'язок: Визначимо середню теплову швидкість носіїв заряду

$$v_T = \sqrt{3k_B T / m_n} = \sqrt{3 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 / (0,26 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31})} = 2,29 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Визначимо величину довжини вільного пробігу:

$$l = \mu v_T m q^{-1} = 0,1 \cdot 2,29 \cdot 10^5 \cdot 0,26 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^{-1} = 3,386 \cdot 10^{-8} \text{ м} \approx 33,9 \text{ нм}$$

і величину середнього часу вільного пробігу:

$$\tau = l / v_T = 3,386 \cdot 10^{-8} / (2,29 \cdot 10^5) = 1,48 \cdot 10^{-13} \text{ с} \approx 0,15 \text{ пс}$$

Задача 6. Обчислити відношення повного струму через напівпровідник до току, зумовленого доречний складової: а) у власному германії; б) в германії *p*-типу з питомим опором $0,05 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Прийняти власну концентрацію носіїв заряду при кімнатній температурі

$n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Визначимо відношення повного струму через напівпровідник до току, зумовленого дірковою складовою:

$$\frac{I}{I_p} = \frac{j / S}{j_p / S} = \frac{j}{j_p} = \frac{q(n\mu_n + p\mu_p)E}{qp\mu_p E} = \frac{n\mu_n + p\mu_p}{p\mu_p} = 1 + \frac{n}{p} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_p}.$$

Застосуємо до отриманого виразу закон діючих мас ($pn = n_i^2$):

$$\frac{I}{I_p} = 1 + \frac{n^2}{n_i^2} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_p} = 1 + \frac{n_i^2}{p^2} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_p}.$$

Отже, для вирішення завдання необхідно знати концентрації носіїв заряду. Концентрацію дірок в германії *p*-типу визначимо, вважаючи, що виконується співвідношення $p \approx n$, тоді:

$$p = (q\mu_p \mu_p)^{-1} = (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,05 \cdot 0,19)^{-1} = 6,57 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

Обчислимо шукане відношення струмів:

– у власному германії:

$$\frac{I}{I_p} = 1 + \frac{n_i^2}{p^2} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_p} = 1 + \frac{n_i^2}{n_i^2} \cdot \frac{\mu_n}{\mu_p} = 1 + \frac{\mu_n}{\mu_p} = 1 + \frac{0,39}{0,19} = 3,053;$$

– в германії p -типу з питомим опором $0,05 \text{ Ом} \cdot \text{м}$:

$$\frac{I}{I_p} = 1 + \frac{(2,1 \cdot 10^{19})^2}{(6,57 \cdot 10^{20})^2} \cdot \frac{0,39}{0,19} = 1,0021.$$

Задача 7. *Визначити власну питому провідність германію при кімнатній температурі, якщо $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.*

Розв'язок: Визначимо шукану питому провідність:

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) = qn_i(\mu_n + \mu_p) = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 2,1 \cdot 10^{19} \cdot (0,39 + 0,19) = 1,951 \text{ См/м}.$$

Задача 8. *До стрижня з арсеніду галію довжиною 50 мм прикладена напруга 50 В. За який час електрон пройде через весь зразок, якщо рухливість електронів $\mu_n = 0,9 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$?*

Розв'язок: Напруженість електричного поля в зразку визначиться як:

$$E = U / l,$$

отже, дрейфова швидкість електронів дорівнює

$$v_d = \mu_n E = \mu_n U / l.$$

Тоді, час прольоту електрона

$$t = l / v_d = l^2 / (\mu_n U) = (50 \cdot 10^{-3})^2 / (0,9 \cdot 50) = 5,555 \cdot 10^{-5} \text{ с} \approx 55,5 \text{ мкс}.$$

Задача 9. *Питомий опір власного кремнію при $T = 300 \text{ К}$ дорівнює $2000 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, власна концентрація носіїв заряду $n_i = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$. Чому дорівнює при цій температурі питомий опір кремнію n -типу з концентрацією електронів $n = 10^{20} \text{ м}^{-3}$? Вважати, що рухливість електронів в три рази більше рухливості дірок і що це співвідношення зберігається як для власного, так і для домішкового напівпровідника із заданим ступенем легування.*

Розв'язок: Розглянемо співвідношення величин питомого опору домішкового і власного напівпровідників:

$$\frac{\rho_n}{\rho_i} = \frac{\sigma_i}{\sigma_n} = \frac{qn_i(\mu_n + \mu_p)}{qn\mu_n} = \frac{n_i}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu_n / \mu_p}\right) = \frac{n_i}{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \frac{n_i}{n} \cdot \frac{b+1}{b},$$

Звідки знаходимо відповідь:

$$\rho_n = \frac{n_i}{n} \cdot \frac{b+1}{b} \cdot \rho_i = \frac{1,5 \cdot 10^{16}}{10^{20}} \cdot \frac{3+1}{3} \cdot 2000 = 0,4 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Задача 10. *Обчислити питомий опір германію p -типу з концентрацією дірок $p = 4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Знайти відношення електронної провідності до діркової, якщо $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.*

Розв'язок: Визначимо концентрацію електронів в германії

$$n = n_i^2 / p,$$

тоді шуканий питомий опір зразка знайдеться як:

$$\rho = \frac{p}{q(\mu_p p^2 + \mu_n n_i^2)} = \frac{4 \cdot 10^{19}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (0,19 \cdot (4 \cdot 10^{19})^2 + 0,39 \cdot (2,1 \cdot 10^{19})^2)} = 0,5245 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Співвідношення електронної провідності до діркової запишемо:

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_p} = \frac{\mu_n}{\mu_p} \cdot \frac{n_i^2}{p^2} = \frac{0,39}{0,19} \cdot \left(\frac{2,1 \cdot 10^{19}}{4 \cdot 10^{19}} \right)^2 = 0,5658.$$

Задача 11. Зразок *n*-кремнію при температурі $T_1 = 300 \text{ K}$ має питомий опір $\rho_n = 0,05 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, причому концентрація електронів в ньому не змінюється при нагріванні до температури $T_2 = 500 \text{ K}$. Визначити, на скільки зміниться концентрація неосновних носіїв заряду в цьому температурному діапазоні. При температурі T_1 рухливість електронів $\mu_n = 0,14 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$. Значення власної концентрації $n_i = 7 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}$. Коефіцієнт температурної зміни ширини забороненої зони $b = -2,84 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} / \text{K}$.

Розв'язок: Концентрацію нерівноважних носіїв при температурах будемо визначати відповідно до закону діючих мас

$$p_{T_1} = n_{i(T_1)}^2 / n_{T_1} \text{ и } p_{T_2} = n_{i(T_2)}^2 / n_{T_2}.$$

Згідно з умовою задачі, концентрація електронів в розглянутому температурному діапазоні незмінна, тобто $n_{T_1} = n_{T_2}$, що дозволяє записати вирази для неосновних носіїв заряду в вигляді

$$p_{T_1} = n_{i(T_1)}^2 / n \text{ та } p_{T_2} = n_{i(T_2)}^2 / n.$$

Визначимо відношення концентрацій неосновних носіїв заряду в зазначеному температурному діапазоні

$$\frac{p_{T_2}}{p_{T_1}} = \frac{n_{i(T_2)}^2 / n}{n_{i(T_1)}^2 / n} = \frac{n_{i(T_2)}^2}{n_{i(T_1)}^2}$$

або, вводячи позначення p_1, p_2, n_{i1}, n_{i2} для $p_{T_1}, p_{T_2}, n_{i(T_1)}, n_{i(T_2)}$, відповідно, запишемо знайдене співвідношення в більш компактній формі:

$$p_2 / p_1 = (n_{i2} / n_{i1})^2.$$

Концентрація власних носіїв заряду при температурах T_1 і T_2 має вигляд:

$$n_{i1} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{2k_B T_1}\right)$$

і

$$n_{i2} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{2k_B T_2}\right),$$

де ΔE_{g0} – ширина забороненої зони напівпровідника при 0 K, а $k_E = -b$ – коефіцієнт температурного зменшення ширини забороненої зони.

Підставляючи значення величин n_{i1} і n_{i2} в шукане співвідношення, отримаємо

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{n_{i2}}{n_{i1}} \right)^2 = \left(\frac{4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{2k_B T_2}\right)}{4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{2k_B T_1}\right)} \right)^2 = \frac{T_2^3}{T_1^3} \exp\left(\frac{\Delta E_{g0} (T_2 - T_1)}{k_B T_1 T_2}\right).$$

Аналіз отриманого виразу дозволяє стверджувати, що для вирішення завдання необхідно знати величину забороненої зони в кремнії при 0 K, яку визначимо так:

$$\Delta E_{g0} = \Delta E_{gT} \Big|_{T=0} - bT = 1,12 - (-2,84 \cdot 10^{-4} \cdot 300) = 1,2052 \text{ эВ} \approx 1,2 \text{ эВ}.$$

Зауважимо, що округлення зроблено в меншу сторону, оскільки екстраполяція за цією формулою дещо завищує значення величини забороненої зони кремнію при 0 K.

Обчислимо величину зміни концентрації неосновних носіїв заряду в заданому температурному діапазоні:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{500^3}{300^3} \exp\left(\frac{1,2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (500 - 300)}{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 500}\right) = 5,36 \cdot 10^8.$$

Задача 12. При температурі $T = 300 \text{ K}$ концентрація дірок в германії p -типу дорівнює $p = 2,1 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, а концентрація електронів в сто разів менше ($k = p/n = 100$), рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$. На підставі цих даних знайти власний питомий опір германію.

Розв'язок: Відповідно до закону діючих мас, вираз для власної концентрації носіїв заряду набуде вигляду:

$$n_i = \sqrt{p \cdot n} = \sqrt{p \cdot p/k} = p/\sqrt{k},$$

і, отже, шуканий власний опір запишемо як:

$$\rho_i = \frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{qn_i(\mu_n + \mu_p)} = \frac{\sqrt{k}}{qp(\mu_n + \mu_p)} = \frac{\sqrt{100}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 2,1 \cdot 10^{20} \cdot (0,39 + 0,19)} = 0,512 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Задача 13. При температурі $T = 300 \text{ K}$ власне питомий опір антимоніду галію дорівнює $\rho_i = 10 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Використовуючи довідкові дані ($\mu_n = 0,4 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ та $\mu_p = 0,14 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$), визначити власну концентрацію носіїв заряду цього напівпровідника.

Розв'язок: З виразу для власного питомого опору

$$\rho_i = \frac{1}{\sigma_i} = \frac{1}{qn_i(\mu_n + \mu_p)}.$$

визначимо власну концентрацію носіїв заряду:

$$n_i = \frac{1}{q\rho_i(\mu_n + \mu_p)} = \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot (0,4 + 0,14)} = 1,1558 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3} \approx 1,16 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 14. Епітаксіальний шар арсеніду галію, легований сіркою, має при кімнатній температурі питомий опір $\rho_n = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Визначити концентрацію донорів в шарі, якщо рухливість електронів дорівнює $\mu_n = 0,8 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Нехтуючи концентрацією дірок і вважаючи, що концентрація донорів дорівнює концентрації електронів, вираз для питомого опору набуде вигляду

$$\rho = \sigma^{-1} = \lim_{n \rightarrow N_D} \left(\lim_{p/n \rightarrow 0} q^{-1} (\mu_n n + \mu_p p)^{-1} \right) = (q\mu_n N_D)^{-1}.$$

З отриманого виразу шукана концентрація донорів знайдеться як:

$$N_D = (q\mu_n)^{-1} = (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8)^{-1} = 1,5604 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \approx 1,56 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 15. Через пластину кремнію з питомим опором $\rho = 0,01 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ проходить електричний струм щільністю $j = 10 \text{ мА} / \text{мм}^2$. Знайти середні швидкості дрейфу електронів і дірок, якщо їх рухливості $\mu_n = 0,14 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, $\mu_p = 0,05 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ відповідно.

Розв'язок: Оскільки величина електричного поля в пластині кремнію визначається як

$$E = \rho \cdot j,$$

то шукані дрейфові швидкості електронів і дірок запишемо як:

$$v_n = \mu_n E = \mu_n \rho \cdot j = 0,14 \cdot 0,01 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-3})^{-2} = 14 \text{ м} / \text{с},$$

$$v_p = \mu_p E = \mu_p \rho \cdot j = 0,05 \cdot 0,01 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot (10^{-3})^{-2} = 5 \text{ м} / \text{с}.$$

Задача 16. Розрахувати концентрацію електронів і дірок в германії p -типу з питомим опором $\rho = 0,05 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ при температурі $T = 300 \text{ K}$, скориставшись тим, що $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Нехтуючи концентрацією дірок і вважаючи, що концентрація донорів дорівнює концентрації електронів, вираз для питомого опору набуде вигляду

$$\rho = \sigma^{-1} = \lim_{n/p \rightarrow 0} q^{-1} (\mu_n n + \mu_p p)^{-1} = (q \mu_p p)^{-1}.$$

З отриманого виразу знайдемо шукану концентрацію дірок:

$$p = (q \rho \mu_p)^{-1} = (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,19)^{-1} = 6,5700 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

Концентрацію електронів визначимо із закону діючих мас:

$$n = n_i^2 / p = (2,1 \cdot 10^{19})^2 / (6,5700 \cdot 10^{20}) = 6,7123 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3} \approx 6,71 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 17. *Визначити, при якій концентрації домішок питома провідність германію при температурі $T = 300 \text{ К}$ має найменше значення. Знайти відношення власної питомої провідності до мінімальної при тій же температурі. Власну концентрацію носіїв заряду прийняти рівною $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, рухливість дірок $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.*

Розв'язок: Як відомо, в дірковому напівпровіднику концентрація дірок розраховується через концентрацію акцепторів:

$$p = \frac{1}{2} \cdot (N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}).$$

Виходячи із закону діючих мас, визначимо концентрацію електронів в дірковому напівпровіднику:

$$n = n_i^2 / p = n_i^2 \cdot 2 \cdot (N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2})^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (-N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}).$$

Тоді знайдемо питому електропровідність діркового напівпровідника:

$$\sigma = q (\mu_n n + \mu_p p) = \frac{q}{2} (\mu_n (-N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}) + \mu_p (N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2})).$$

Досліджуємо отриману функцію на екстремум. Запишемо похідну питомої електропровідності по концентрації акцепторів:

$$\frac{d\sigma}{dN_A} = \frac{q}{2} \cdot \frac{(\mu_p + \mu_n) N_A + (\mu_p - \mu_n) \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}{\sqrt{N_A^2 + 4n_i^2}}.$$

Прирівнюючи похідну до нуля і враховуючи, що $\sqrt{N_A^2 + 4n_i^2} \neq 0$, отримаємо рівняння для визначення шуканої концентрації акцепторів:

$$(\mu_p + \mu_n) N_A + (\mu_p - \mu_n) \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2} = 0,$$

вирішуючи яке, визначимо шукану концентрацію акцепторів:

$$N_{A \min} = \frac{(\mu_n - \mu_p) n_i}{\sqrt{\mu_n \mu_p}} = \frac{(0,39 - 0,19) \cdot 2,1 \cdot 10^{19}}{\sqrt{0,39 \cdot 0,19}} = 1,543 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Виходячи з останньої величини, визначимо концентрації дірок і електронів:

$$p_{\min} = \frac{1}{2} \cdot (N_{A \min} + \sqrt{N_{A \min}^2 + 4n_i^2}) = \frac{1,543 \cdot 10^{19} + \sqrt{(1,543 \cdot 10^{19})^2 + 4(2,1 \cdot 10^{19})^2}}{2} = 3,009 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3},$$

$$n_{\min} = \frac{1}{2} \cdot (-N_{A \min} + \sqrt{N_{A \min}^2 + 4n_i^2}) = \frac{-1,543 \cdot 10^{19} + \sqrt{(1,543 \cdot 10^{19})^2 + 4(2,1 \cdot 10^{19})^2}}{2} = 1,466 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Для знаходження шуканого співвідношення питомих електропровідностей, визначимо попередньо ці величини:

$$\sigma_i = q (\mu_n n_i + \mu_p n_i) = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (0,39 \cdot 2,1 \cdot 10^{19} + 0,19 \cdot 2,1 \cdot 10^{19}) = 1,951 \text{ См/м},$$

$$\sigma_{\min} = q (\mu_n n_{\min} + \mu_p p_{\min}) = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (0,39 \cdot 3,009 \cdot 10^{19} + 0,19 \cdot 1,466 \cdot 10^{19}) = 1,832 \text{ См/м}.$$

Тоді знайдемо шукане співвідношення власної електропровідності до мінімальної:

$$\sigma_i / \sigma_{\min} = 1,951 / 1,832 = 1,065.$$

Задача 18. Обчислити співвідношення власної питомої провідності до мінімальної при температурі $T = 300 \text{ K}$ для антимоніду індію, якщо $n_i = 2 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$, рухливість електронів

$$\mu_n = 7,8 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}, \text{ рухливість дірок } \mu_p = 0,075 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}.$$

Вказівка: Скористатися результатами попередньої задачі.

Розв'язок: Визначимо концентрацію акцепторів

$$N_{A \min} = \frac{(\mu_n - \mu_p) n_i}{\sqrt{\mu_n \mu_p}} = \frac{(7,8 - 0,075) \cdot 2,0 \cdot 10^{22}}{\sqrt{7,8 \cdot 0,075}} = 2,020 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Виходячи з останньої величини, визначимо концентрації дірок і електронів:

$$p_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \left(N_{A \min} + \sqrt{N_{A \min}^2 + 4n_i^2} \right) = \frac{2,020 \cdot 10^{23} + \sqrt{(2,020 \cdot 10^{23})^2 + 4(2,0 \cdot 10^{22})^2}}{2} = 2,040 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3},$$

$$n_{\min} = \frac{1}{2} \cdot \left(-N_{A \min} + \sqrt{N_{A \min}^2 + 4n_i^2} \right) = \frac{-2,020 \cdot 10^{23} + \sqrt{(2,020 \cdot 10^{23})^2 + 4(2,0 \cdot 10^{22})^2}}{2} = 1,961 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Для знаходження шуканого співвідношення питомих електропровідностей, визначимо попередньо ці величини:

$$\sigma_i = q(\mu_n n_i + \mu_p n_i) = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (7,8 \cdot 2,0 \cdot 10^{22} + 0,075 \cdot 2,0 \cdot 10^{22}) = 25230 \text{ См/м},$$

$$\sigma_{\min} = q(\mu_n n_{\min} + \mu_p p_{\min}) = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (7,8 \cdot 1,961 \cdot 10^{21} + 0,075 \cdot 2,040 \cdot 10^{23}) = 4900 \text{ См/м}.$$

Отже, шукане співвідношення власної електропровідності до мінімальної визначиться як

$$\sigma_i / \sigma_{\min} = 25230 / 4900 = 5,149 \approx 5,15.$$

Задача 19. У власному германії при $T = 300 \text{ K}$ концентрація атомів дорівнює $n_a = 4,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, а концентрація електронів провідності $n = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Чому дорівнює концентрація дірок при цій температурі в домішковому германії, що містить один атом донорних домішок на 10^6 атомів основної речовини ($k = n_a / N_D$).

Розв'язок: В силу того, що у власному напівпровіднику концентрації дірок і електронів рівні, отримаємо

$$n_i = n = p = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

І врахувавши, що концентрація донорів дорівнює

$$N_D = n_a / k,$$

отримаємо вираз для шуканої концентрації дірок у вигляді

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left(-N_D + \sqrt{N_D^2 + 4n_i^2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(-n_a / k + \sqrt{n_a^2 / k^2 + 4n_i^2} \right).$$

Підставивши вихідні дані, остаточно отримаємо

$$p = \frac{-4,4 \cdot 10^{28} / 10^6 + \sqrt{(4,4 \cdot 10^{28} / 10^6)^2 + 4(2,1 \cdot 10^{19})^2}}{2} = 1,002 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 20. Визначити струм через зразок кремнію прямокутної форми $l \times b \times h = 5 \times 2 \times 1 \text{ мм}$, якщо уздовж зразка прикладено напругу $U = 10 \text{ В}$. Відомо, що концентрація електронів в напівпровіднику $n = 10^{21} \text{ м}^{-3}$, а їх рухливість $\mu_n = 0,14 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Нехтуючи концентрацією дірок і вважаючи, що концентрація донорів дорівнює концентрації електронів, вираз для питомої провідності набуде вигляду

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow N_D} \left(\lim_{p/n \rightarrow 0} q(\mu_n n + \mu_p p) \right) = q \mu_n N_D.$$

Отже, опір зразка визначиться як:

$$R = \rho l / S = \sigma^{-1} l (b \cdot h)^{-1} = (q \mu_n N_D)^{-1} l (b \cdot h)^{-1},$$

А шуканий струм: $I = U/R = Uq\mu_n N_D b h l^{-1} = \frac{10 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,14 \cdot 10^{21} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}} = 89,72 \cdot 10^{-3} \text{ A} \approx 89,7 \text{ mA}$.

Задача 21. При дослідженні температурної залежності концентрації носіїв заряду для чистого германію в області власної електропровідності отримані наступні результати: при температурі $T_1 = 463 \text{ K}$ власна концентрація $n_{i1} = 10^{20} \text{ м}^{-3}$, а при $T_2 = 781 \text{ K}$ – $n_{i2} = 10^{23} \text{ м}^{-3}$. На основі цих даних розрахувати ширину забороненої зони при $T_0 = 300 \text{ K}$, якщо коефіцієнт її температурної зміни $b = -2,84 \cdot 10^{-4} \text{ eV/K}$.

Розв'язок: Визначено концентрації власних носіїв заряду при температурах T_1 і T_2 :

$$n_{i1} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{2k_B T_1}\right)$$

та

$$n_{i2} = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{2k_B T_2}\right),$$

де ΔE_{g0} – ширина забороненої зони напівпровідника при 0 К, $k_E = -b$ – коефіцієнт температурного зменшення ширини забороненої зони, k_B – стала Больцмана, h – стала Планка, і m_c, m_v – ефективні маси густини станів електронів і дірок відповідно.

Ділячи другу величину на першу і зводячи в квадрат, отримаємо:

$$\left(\frac{n_{i2}}{n_{i1}}\right)^2 = \frac{\left(4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_2^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_2}{2k_B T_2}\right)\right)^2}{\left(4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T_1^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T_1}{2k_B T_1}\right)\right)^2} = \frac{T_2^3}{T_1^3} \exp\left(\frac{\Delta E_{g0} (T_2 - T_1)}{k_B T_1 T_2}\right).$$

Вирішуючи отримане рівняння щодо ΔE_{g0} , запишемо наступний вираз:

$$\Delta E_{g0} = \ln\left(\frac{n_{i2}^2 T_1^3}{n_{i1}^2 T_2^3}\right) \frac{k_B T_1 T_2}{T_2 - T_1} = \ln\left(\frac{(10^{23})^2 \cdot 463^3}{(10^{20})^2 \cdot 781^3}\right) \cdot \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 463 \cdot 781}{781 - 463} = 1,9227 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 1,200 \text{ eV}.$$

Отже, шукана ширина забороненої зони при $T_0 = 300 \text{ K}$ дорівнює:

$$\Delta E_{g300} = \Delta E_{g0} + bT_0 = 1,200 - 2,84 \cdot 10^{-4} \cdot 300 = 1,149 \text{ eV} \approx 1,15 \text{ eV}.$$

Задача 22. В результаті вимірювань встановлено, що при температурі $T_1 = 300 \text{ K}$ питомий опір власного германію $\rho_{i1} = 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а при $T_2 = 500 \text{ K}$ питомий опір $\rho_{i2} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Вважаючи, що рухливість електронів і дірок при нагріванні змінюється за законом $\mu_n = 0,39 \cdot (T/300)^{-3/2}$ і $\mu_p = 0,19 \cdot (T/300)^{-3/2}$, визначити температурну залежність ширини забороненої зони (в лінійному наближенні). Ефективна маса густини станів для електронів зони провідності $m_c = 0,55 \cdot m_0$, а для дірок валентної зони $m_v = 0,388 \cdot m_0$.

Вказівка: Скористатися результатами попередньої задачі.

Розв'язок: Перш за все, запишемо значення рухливостей носіїв заряду при зазначених температурах:

$$\mu_{n1} = \mu_{n0} \cdot (T_1/T_0)^{-3/2}, \quad \mu_{p1} = \mu_{p0} \cdot (T_1/T_0)^{-3/2},$$

і

$$\mu_{n2} = \mu_{n0} \cdot (T_2/T_0)^{-3/2}, \quad \mu_{p2} = \mu_{p0} \cdot (T_2/T_0)^{-3/2},$$

де $T_0 = 300 \text{ K}$ – опорна температура, а $\mu_{n0} = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ і $\mu_{p0} = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ – рухливості електронів і дірок при опорній температурі.

Тоді, питомі опори при зазначених температурах можна записати:

$$\rho_{i1} = \frac{T_1^{3/2}}{T_0^{3/2}} \cdot \left(qn_{i1} (\mu_{n0} + \mu_{p0}) \right)^{-1} \quad \text{і} \quad \rho_{i2} = \frac{T_2^{3/2}}{T_0^{3/2}} \cdot \left(qn_{i2} (\mu_{n0} + \mu_{p0}) \right)^{-1}.$$

З отриманих виразів легко визначити концентрації власних носіїв заряду:

$$n_{i1} = \frac{T_1^{3/2}}{T_0^{3/2}} \cdot \left(q\rho_{i1} (\mu_{n0} + \mu_{p0}) \right)^{-1} \quad \text{і} \quad n_{i2} = \frac{T_2^{3/2}}{T_0^{3/2}} \cdot \left(q\rho_{i2} (\mu_{n0} + \mu_{p0}) \right)^{-1}.$$

Підставляючи отримані вирази в формулу щодо визначення ширини забороненої зони напівпровідника при абсолютному нулі за даними двох температурних вимірів -

$$\Delta E_{g0} = \ln \left(\frac{n_{i2}^2 T_1^3}{n_{i1}^2 T_2^3} \right) \frac{k_B T_1 T_2}{T_2 - T_1},$$

і провівши необхідні перетворення, отримаємо шукану величину ширини забороненої зони при температурі абсолютного нуля у вигляді:

$$\Delta E_{g0} = 2 \ln \left(\frac{\rho_{i1}}{\rho_{i2}} \right) \frac{k_B T_1 T_2}{T_2 - T_1},$$

і в числах:

$$\Delta E_{g0} = 2 \ln \left(\frac{0,5}{1,25 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 500}{500 - 300} = 1,2408 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,77446 \text{ eВ} \approx 0,7745 \text{ eВ}.$$

Враховавши, що при температурі $T_0 = 300 \text{ K}$ ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta E_{g300} = 0,66 \text{ eВ}$, визначимо коефіцієнт температурного зміни ширини забороненої зони

$$b = \frac{\Delta E_{g300} - \Delta E_{g0}}{T_{300}} = \frac{0,66 - 0,7745}{300} = -3,817 \cdot 10^{-4} \text{ eВ / K}.$$

Остаточно, температурна залежність ширини забороненої зони в eВ набуде вигляду:

$$\Delta E_g = \Delta E_{g0} + bT = 0,7745 - 3,817 \cdot 10^{-4} T.$$

Задача 23. На скільки збільшиться питома провідність антимоніду індію з власної електропровідністю при зміні температури від 20°C до 21°C , якщо ширина забороненої зони $\Delta E_{g0} = 0,172 \text{ eВ}$, а рухливість електронів і дірок змінюється за законом $T^{-3/2}$. Коефіцієнт температурного зміни ширини забороненої зони $b = -2,8 \cdot 10^{-4} \text{ eВ / K}$.

Вказівка: Скористатися результатами попередньої задачі.

Розв'язок: По-перше, виразимо температуру в абсолютних одиницях $T_1 = t_1 + T_A$ та $T_2 = t_2 + T_A$, де $t_1 = 20^\circ\text{C}$ і $t_2 = 21^\circ\text{C}$ – початкові температури в градусах Цельсія, або $T_A = 273,15 \text{ K}$ – початкові температури в градусах Кельвіна.

По-друге, визначимо ширину забороненої зони антимоніду індію при температурі абсолютного нуля в лінійному наближенні, вважаючи при цьому, що її величина змінюється несуттєво в даному температурному діапазоні:

$$\Delta E_{g0} = \Delta E_g \Big|_{t_1} - b \cdot (t_1 + T_A) = 0,172 - (-2,8 \cdot 10^{-4} \cdot (20 + 273,15)) = 0,25408 \text{ eВ} \approx 0,254 \text{ eВ}.$$

Запишемо співвідношення питомих провідностей як $k = \sigma_{i2} / \sigma_{i1}$, і отримаємо вираз для ширини забороненої зони при температурі абсолютного нуля:

$$\Delta E_{g0} = 2 \ln \left(\frac{\rho_{i1}}{\rho_{i2}} \right) \cdot \frac{k_B T_1 T_2}{T_2 - T_1} = 2 \ln \left(\frac{\sigma_{i2}}{\sigma_{i1}} \right) \cdot \frac{k_B (t_1 + T_A)(t_2 + T_A)}{t_2 - t_1} = 2 \ln(k) \cdot \frac{k_B (t_1 + T_A)(t_2 + T_A)}{t_2 - t_1}.$$

Тоді отримаємо рівняння щодо величини k у вигляді співвідношення:

$$k = \sigma_{i2} / \sigma_{i1} = \exp \left(\frac{-\Delta E_{g0} (t_2 - t_1)}{2k_B (t_1 + T_A)(t_2 + T_A)} \right).$$

З цього виразу легко отримати формулу для відносної зміни величини питомої електропровідності, а саме:

$$\Delta\sigma_i = \frac{\sigma_{i1} - \sigma_{i2}}{\sigma_{i1}} \cdot 100\% = (1 - \sigma_{i2}/\sigma_{i1}) \cdot 100\% = \left(1 - \exp\left(\frac{-\Delta E_{g0}(t_2 - t_1)}{2k_B(t_1 + T_A)(t_2 + T_A)}\right)\right) \cdot 100\% ,$$

і в числах:

$$\Delta\sigma_i = \left(1 - \exp\left(\frac{-0,254 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (21-20)}{2 \cdot 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot (20+273,15)(21+273,15)}\right)\right) \cdot 100\% = (1 - 0,98305) \cdot 100\% = 1,695\% \approx 1,7\% .$$

Розділ 3.2 Гальваноманітні явища

Задача 1. *Визначити рухливість і концентрацію електронів в кремнії n-типу, питомий опір якого $\rho = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, а коефіцієнт Холла $R_H = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{Кл}$.*

Розв'язок: Концентрацію електронів можна визначити з виразу для сталої Холла ($R_H = (qn)^{-1}$):

$$n = (qR_H)^{-1} = (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 2,1 \cdot 10^{-3})^{-1} = 2,97 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} .$$

Оскільки розглядається електронний кремній, то рухливість знайдемо як:

$$\mu_n = \sigma / qn = (qn\rho)^{-1} = (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 2,97 \cdot 10^{21} \cdot 1,8 \cdot 10^{-2})^{-1} = 0,117 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1} .$$

Задача 2. *Прямокутний зразок напівпровідника n-типу з розмірами $a = 50 \text{ мм}$, $b = 5 \text{ мм}$ та $\delta = 1 \text{ мм}$ поміщений в магнітне поле з індукцією $B = 0,5 \text{ Тл}$. Вектор магнітної індукції перпендикулярний до площини зразка. Під дією напруги $U_a = 0,42 \text{ В}$, прикладеної вздовж зразка, по ньому протікає струм $I_a = 20 \text{ мА}$. Вимірювання показують ЕРС Холла $U_H = 6,25 \text{ мВ}$. Знайти питому провідність, рухливість і концентрацію носіїв заряду для цього напівпровідника, вважаючи, що електропровідність обумовлена носіями тільки одного знаку.*

Розв'язок: Визначимо питому провідність як:

$$\sigma_n = \frac{a}{b \cdot \delta} \cdot \frac{I_a}{U_a} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 4,2 \cdot 10^{-1}} = 476 \text{ См} / \text{м} \approx 480 \text{ См} / \text{м} .$$

З виразу для напруги Холла – $U_H = R_H I_a B / \delta = I_a B / (qn\delta)$ визначимо концентрацію електронів:

$$n = \frac{I_a \cdot B}{qU_H \delta} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 6,25 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 0,9987 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-2} \approx 1,00 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3} .$$

Оскільки розглядається електронний кремній, то рухливість знайдемо як:

$$\mu_n = \sigma / (qn) = 480 / (1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,000 \cdot 10^{22}) = 0,300 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1} .$$

Задача 3. *При тих же умовах, що і в попередній задачі, визначити ЕРС Холла в зразку міді тих же розмірів, по якому тече такий же струм. Концентрацію електронів провідності в міді прийняти рівною $n = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Порівняти отриманий результат з результатом попередньої задачі.*

Розв'язок: Визначимо величину напруги Холла:

$$U_H = R_H \frac{I_a \cdot B}{\delta} = \frac{I_a \cdot B}{qn\delta} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 8,45 \cdot 10^{28} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 7,386 \cdot 10^{-10} \text{ В} \approx 0,74 \text{ нВ} .$$

Порівняємо у скільки разів ЕРС Холла в напівпровідниках більше ЕРС Холла у металах:

$$U_{H_s} / U_{H_m} = 6,25 \cdot 10^{-3} / 7,386 \cdot 10^{-10} \approx 10^6 \div 10^7 .$$

Задача 4. Плоский прямокутний зразок фосфіду індію з питомим опором $\rho = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ і рухливістю електронів $\mu_n = 0,4 \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$ розміщений у магнітному полі, магнітна індукція якого $B = 1 \text{ Тл}$, а вектор магнітної індукції перпендикулярний до площини кристала. Уздовж зразка пропускають струм $I = 20 \text{ мА}$. Визначити силу Лоренца, що діє на електрони, якщо площа поперечного перерізу зразка $S = 2 \text{ мм}^2$.

Розв'язок: Сила Лоренца визначається як:

$$F_L = qBv_e \sin \alpha.$$

Оскільки вектор магнітної індукції перпендикулярний більш плоским граням кристала, то $\alpha = \pi/2$. Отже, формулу для сили Лоренца можна записати як:

$$F_L = qBv_e \sin(\pi/2) = qBv_e.$$

Врахувавши, що дрейфова швидкість електронів дорівнює $v_e = \mu_n \rho I / S$, отримаємо:

$$F_L = q\mu_n \rho IB / S = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,4 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 / 2 \cdot 10^{-6} = 1,2816 \cdot 10^{-18} \text{ Н}.$$

Задача 5. Зразок арсеніду галію з питомим опором $\rho = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Ом} \cdot \text{м}$ характеризується коефіцієнтом Холла $R_H = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 / \text{Кл}$. Визначити: а) напруженість поля Холла, що виникає при протіканні через зразок струму щільністю $j = 10 \text{ мА} / \text{мм}^2$ і з індукцією магнітного поля $B = 2 \text{ Тл}$; б) напруженість зовнішнього електричного поля для створення заданої щільності струму.

Розв'язок: Напруженість поля Холла визначається як:

$$E_H = jBR = 10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} = 6 \text{ В} / \text{м}.$$

Напруженість зовнішнього поля знайдемо як:

$$E = j\rho = 10 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 5 \text{ В} / \text{м}.$$

Задача 6. Довести, що при заданих напруженості електричного і магнітного полів ЕРС Холла прямо пропорційна рухливості носіїв заряду.

Доведення: Розглянемо напівпровідник n-типу. ЕРС Холла визначається так

$$E_H = jBR = jB / (qn).$$

Оскільки $j = \sigma E = qn\mu_n E$, то формула для ЕРС Холла набуде вигляду:

$$E_H = qn\mu_n EB / (qn) = \mu_n EB.$$

Отриманий вираз вказує на те, що ЕРС Холла прямо пропорційна рухливості носіїв заряду, що й треба було довести.

Задача 7. Кристал кремнію леговано бором до концентрації $N_A = 10^{22} \text{ м}^{-3}$. Обчислити коефіцієнт Холла для температур 40 і 400 К, якщо енергія іонізації бору в кремнії $\Delta E_A = 45 \text{ мєВ}$, а ефективна маса густини станів для дірок валентної зони $m_v = 0,56m_0$.

Розв'язок: Припустимо, що в розглянутому температурному діапазоні концентрація електронів дуже мала в порівнянні з концентрацією дірок. У цих умовах ЕРС Холла буде визначатися виключно дірками і, отже, коефіцієнт Холла знайдеться як:

$$R_H = 1 / (qp).$$

Розглянемо область низьких температур, де концентрація дірок описується виразом:

$$p = \sqrt{\frac{N_A N_V}{g}} \exp\left(\frac{-\Delta E_A}{2k_B T}\right),$$

де $g = 2$ – фактор спінового виродження, а N_V – щільність станів у валентній зоні:

$$N_V = 2 \left(\frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \Big|_{40\text{ K}} = 2 \left(\frac{2\pi \cdot 0,56 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 40}{(1,602 \cdot 10^{-19})^2} \right)^{3/2} = 5,121 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Отже, вираз для коефіцієнта Холла набуде вигляду: $R_H = \sqrt{\frac{g}{q^2 N_A N_V}} \exp\left(\frac{\Delta E_A}{2k_B T}\right)$.

Обчислимо шуканий коефіцієнт Холла при температурі 40 К:

– покладемо фактор спінового виродження рівним 1:

$$R_{H(T=40\text{ K}, g=1)} = \sqrt{\frac{1}{(1,602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{22} \cdot 5,121 \cdot 10^{23}}} \exp\left(\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 40}\right) = 5,949 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 / \text{Кл} \approx 5,95 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 / \text{Кл},$$

– покладемо фактор спінового виродження рівним 2:

$$R_{H(T=40\text{ K}, g=2)} = \sqrt{\frac{2}{(1,602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{22} \cdot 5,121 \cdot 10^{23}}} \exp\left(\frac{45 \cdot 10^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 40}\right) = 8,414 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3 / \text{Кл}.$$

Перейдемо до розгляду області високих температур, тобто при 400 К. Вважаючи, що всі домішки іонізовані і нехтуючи концентрацією власних носіїв, отримаємо, що концентрація дірок дорівнює концентрації акцепторів, тобто $p = N_A$, і шуканий коефіцієнт Холла визначиться як:

$$R_{H(400\text{ K})} = (qp)^{-1} = (qN_A)^{-1} \approx (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{22})^{-1} = 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 / \text{Кл}.$$

Задача 8. У кремнії *n*-типу з концентрацією донорів $N_D = 2 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ при температурі $T_1 = 20 \text{ K}$ коефіцієнт Холла $R_{H1} = 428 \text{ м}^3 / \text{Кл}$, а при температурі $T_2 = 40 \text{ K}$, $R_{H2} = 0,210 \text{ м}^3 / \text{Кл}$. **Визначити енергію іонізації донорів.**

Оцінка рішення: Припустимо, що в розглянутому температурному діапазоні концентрація дірок дуже мала в порівнянні з концентрацією електронів. У цих умовах ЕРС Холла буде визначатися виключно електронами і, отже, коефіцієнт Холла запишеться як:

$$R_H = 1/(qn).$$

Концентрація електронів при низьких температурах описується наступним виразом:

$$n = \sqrt{\frac{N_D N_C}{2}} \exp\left(\frac{-\Delta E_D}{2k_B T}\right).$$

Вважаючи величину щільності станів в зоні провідності незалежної від температури, визначимо коефіцієнти Холла при двох температурах:

$$R_{H1} = \sqrt{\frac{2}{q^2 N_D N_C}} \exp\left(\frac{\Delta E_D}{2k_B T_1}\right) \text{ и } R_{H2} = \sqrt{\frac{2}{q^2 N_D N_C}} \exp\left(\frac{\Delta E_D}{2k_B T_2}\right).$$

Знайдемо співвідношення відповідних коефіцієнтів:

$$\frac{R_{H2}}{R_{H1}} = \exp\left(\frac{\Delta E_D (T_2 - T_1)}{2k_B T_1 T_2}\right).$$

Отримане рівняння дозволяє знайти значення енергії іонізації донорів:

$$\Delta E_D = \ln\left(\frac{R_{H1}}{R_{H2}}\right) \frac{2k_B T_1 T_2}{(T_2 - T_1)},$$

тоді, згідно чисельним умов завдання, отримаємо відповідне значення для енергії іонізації:

$$\Delta E_D = \ln\left(\frac{428,0}{0,210}\right) \cdot \frac{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 20 \cdot 40}{40 - 20} = 8,4162 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 5,253 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} \approx 52,5 \text{ мэВ}.$$

Розв'язок: Припустимо, що в розглянутому температурному діапазоні концентрація дірок дуже мала в порівнянні з концентрацією електронів. У цих умовах ЕРС Холла буде визначатися виключно електронами і, отже, коефіцієнт Холла запишеться як:

$$R_H = 1/(qn).$$

Концентрація електронів при низьких температурах описується наступним виразом:

$$n = \sqrt{\frac{N_D N_C}{2}} \exp\left(\frac{-\Delta E_D}{2k_B T}\right),$$

де $N_C = 2\left(\frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2}\right)^{3/2}$ – щільність станів у зоні провідності.

Тоді, коефіцієнти Холла при двох різних температурах визначається як

$$R_{H1} = \sqrt{\frac{h^3}{q^2 N_D (2\pi m_n^* k_B T_1)^{3/2}}} \exp\left(\frac{-\Delta E_D}{2k_B T_1}\right) \text{ і } R_{H2} = \sqrt{\frac{h^3}{q^2 N_D (2\pi m_n^* k_B T_2)^{3/2}}} \exp\left(\frac{-\Delta E_D}{2k_B T_2}\right).$$

Знайдемо співвідношення відповідних коефіцієнтів: $\frac{R_{H2}}{R_{H1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/4} \exp\left(\frac{\Delta E_D (T_2 - T_1)}{2k_B T_1 T_2}\right)$.

Отримане рівняння легко дозволяється щодо енергії іонізації донорів:

$$\Delta E_D = \ln\left(\frac{R_{H1}^4 T_1^3}{R_{H2}^4 T_2^3}\right) \frac{k_B T_1 T_2}{2(T_2 - T_1)},$$

яка, згідно з чисельним умов завдання, дорівнює:

$$\Delta E_D = \ln\left(\frac{428,0^4 \cdot 20^3}{0,210^4 \cdot 40^3}\right) \cdot \frac{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 20 \cdot 40}{2(40-20)} = 7,8419 \cdot 10^{-22} \text{ Дж} = 4,8945 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} \approx 48,9 \text{ мэВ}.$$

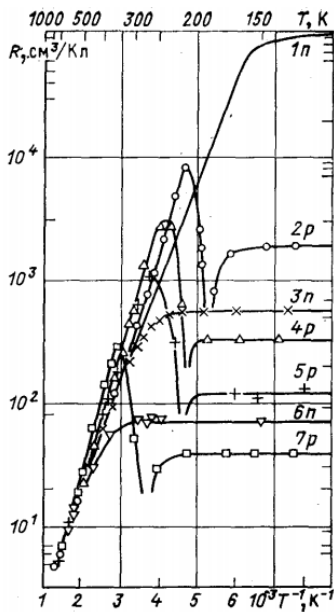
Задача 9. Поясніть, за яких умов, і в яких напівпровідникових матеріалах значення ЕРС Холла може перетворитися на нуль.

Відповідь: У загальному випадку, ЕРС Холла, яку створюють електрони, компенсується ЕРС Холла, яку створюють дірки (отримані електричні поля протилежні). Отже, слід очікувати різкого зменшення величини ЕРС Холла при переході від домішкових напівпровідників до власних. Більш того із зазначеного можна було б припустити, що у власному напівпровіднику, тобто в напівпровіднику з рівною концентрацією електронів і дірок, ЕРС Холла повинна бути рівною нулю. Але в дійсності електрони і дірки мають різні властивості і головна відмінність полягає у величині їх рухливості. Таким чином, умовою зменшення величини ЕРС Холла в нуль буде умова $\mu_n^2 n - \mu_p^2 p = 0$, де μ_n і μ_p – рухливості відповідно електронів і дірок напівпровідника, а n і p концентрації електронів і дірок.

Задача 10. Зобразите (якісно) температурні залежності коефіцієнта Холла для напівпровідників з електропровідністю р- і n-типів і поясніть, чому вони відрізняються.

Відповідь: Температурна залежність коефіцієнта Холла (R_H) у напівпровідниках обумовлена, головним чином, температурними залежностями концентрацій дірок (p) та електронів (n). Як приклад розглянемо залежності коефіцієнта Холла в різних зразках антимоніду індію n- і р-типу (див. рис.). Характеристики окремих зразків наведені в таблиці:

Зразок	1n	2p	3n	4p	5p	6n	7p
Тип провідності	n-тип	p-тип	n-тип	p-тип	p-тип	n-тип	p-тип
Концентрація домішок, м^{-3}	$4,3 \times 10^{18}$	$4,0 \times 10^{21}$	$1,3 \times 10^{22}$	$2,2 \times 10^{22}$	$6,0 \times 10^{22}$	$1,0 \times 10^{23}$	$2,0 \times 10^{23}$



В області, низьких температур, коефіцієнт Холла практично не залежить від температури, що відповідає області виснаження домішок. Розглянемо тепер область високих температур. В області власної електропровідності для напівпровідників n -типу характерна лінійна залежність логарифма модуля коефіцієнта Холла від зворотної температури, тобто $\log(|R|) = k_n \cdot T^{-1}$, де k_n – коефіцієнт пропорційності. У напівпровідників p -типу залежність дещо складніше оскільки у них коефіцієнт Холла має позитивний знак. Отже, при підвищенні температури до області, де починає проявлятися власна електропровідність буде спостерігатися зменшення величини коефіцієнта Холла і при досягненні температури інверсії коефіцієнт Холла стане рівним нулю. Подальше зростання температури призведе до появи і зростання по абсолютній величині коефіцієнта Холла, але він вже буде характеризуватися негативним знаком. Вказане зростання величини коефіцієнта Холла припиняється при температурі на початку ділянки власної електропровідності. Подальше зростання температури призводить до такої ж залежності коефіцієнта Холла, як і для напівпровідників n -типу.

напівпровідників n -типу.

Задача 11. Плівка антимоніду індію n -типу розмірами $l \times b = 20 \times 10$ мм розташована в площині, перпендикулярній магнітному полю Землі. Обчислити, яку різницю потенціалів потрібно прикласти вздовж плівки (по довжині l), щоб на інших сторонах отримати ЕРС Холла $U_H = 1$ мВ. Індукцію магнітного поля Землі прийняти рівною 44 мкТл. Рухливість електронів в антимоніді індію дорівнює $\mu_n = 7,8 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Залежність напруженості Холла від напруженості зовнішнього електричного поля прикладеного до зразка має такий вигляд:

$$E_H = \mu_n EB.$$

Перейшовши від напруженості до напруги, отримаємо

$$U_H / b = \mu_n UB / l,$$

звідки і визначимо шукану зовнішню напругу:

$$U = \frac{l}{b} \cdot \frac{U_H}{\mu_n B} = \frac{20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3} \cdot 7,8 \cdot 44 \cdot 10^{-6}} = 5,8275 \text{ В} \approx 5,83 \text{ В}.$$

Задача 12. Визначити ЕРС Холла, що виникає в пластині германію товщиною 0,5 мм з власної електропровідності при температурі $T = 300$ К, якщо вздовж пластини проходить електричний струм $I = 10$ мА, величина питомого опору $\rho_{il} = 0,5$ Ом·м. Вектор магнітної індукції ($B = 0,6$ Тл) перпендикулярний до площини пластини.

Розв'язок: Коефіцієнт Холла власного напівпровідника визначається за формулою:

$$R_H = \frac{r}{n_i} \left(\frac{1-b}{1+b} \right),$$

де r – Хол-фактор, який в випадку бездомішкового кристала дорівнює $r = 3\pi/8$, b – відношення рухливості електронів до рухливості дірок, тобто $b = \mu_n / \mu_p = 39/19$.

Отже, рішення задачі зводиться до знаходження власної концентрації носіїв заряду, яку визначимо за величиною питомого опору:

$$n_i = \left(q \rho_i (\mu_n + \mu_p) \right)^{-1} = \left(q \rho_i \left(0,39 \cdot (T/300)^{-3/2} + 0,19 \cdot (T/300)^{-3/2} \right) \right)^{-1}.$$

Після нескладних перетворень отримаємо вираз

$$n_i = \frac{\sqrt{3}}{52200} \cdot \frac{T^{3/2}}{q\rho_i}.$$

Підставивши отриманий вираз для власної концентрації носіїв заряду в вираз для коефіцієнта Холла, отримуємо шукане практичне вираження для германію з власної електропровідністю у вигляді:

$$R_H = -225\sqrt{3}\pi r_i T^{-3/2},$$

тоді отримаємо чисельне значення:

$$R_{H(300K)} = -225\sqrt{3}\pi \cdot 0,5 \cdot 300^{-3/2} = -1,178 \cdot 10^{-1} \text{ м}^3 / \text{Кл} \approx -0,118 \text{ м}^3 / \text{Кл}.$$

Обчислимо ЕРС Холла:

$$U_H = \frac{IBR_H}{\delta} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,6 \cdot |-0,118|}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 1,416 \text{ В} \approx 1,42 \text{ В}.$$

Задача 13. Встановлено, що при деякій температурі в кристалі антимоніду індію ЕРС Холла зменшується до нуля. Визначити, яка частка електричного струму через зразок при цій температурі переноситься дірками, якщо відношення рухливості електронів до рухливості дірок дорівнює 100.

Розв'язок: Коефіцієнт Холла напівпровідника зі змішаною електропровідністю в загальному випадку визначається за формулою:

$$R_H = \frac{r}{q} \cdot \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = \frac{r}{q} \cdot \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2},$$

де $b = \mu_n / \mu_p = 10$.

ЕРС Холла зменшується до нуля тоді, і тільки тоді, коли коефіцієнт Холла дорівнює нулю:

$$R_H = \frac{r}{q} \cdot \frac{p - nb^2}{(p + nb)^2} = 0,$$

З якого відразу випливає, що $p/n = b^2$.

Знайдемо шукане відношення діркового струму до повного току:

$$\frac{j_p}{j} = \frac{qp\mu_p E}{q(p\mu_p + n\mu_n)E} = \frac{p\mu_p}{p\mu_p + n\mu_n} = \frac{b}{b+1} = \frac{100}{100+1} = 0,9901 = 99,01\%.$$

Задача 14. Встановлено, що при деякій температурі в кристалі германію ЕРС Холла зменшується до нуля. Визначити, яка частка електричного струму через зразок при цій температурі переноситься дірками, якщо рухливість електронів $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, а рухливість дірок $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Визначимо величину відносини рухливості електронів до рухливості дірок в германії:

$$b = \mu_n / \mu_p = 0,39 / 0,19 = 39 / 19 \approx 2,0526,$$

тоді шукане відношення діркового струму до повного струму:

$$\frac{j_p}{j} = \frac{b}{b+1} = \frac{39/19}{39/19+1} = \frac{39}{58} = 0,6724 = 67,24\%.$$

Задача 15. Обчислити, при якому співвідношенні концентрацій електронів і дірок в кремнії ЕРС Холла зменшується до нуля, якщо рухливість електронів $\mu_n = 0,14 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, а рухливість дірок $\mu_p = 0,05 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$.

Розв'язок: Визначимо величину співвідношення рухливості електронів до рухливості дірок в кремнії:

$$b = \mu_n / \mu_p = 0,14 / 0,05 = 2,8,$$

тоді шукане співвідношення концентрації дірок до концентрації електронів:

$$p / n = b^2 = 2,8^2 = 7,84.$$

Задача 16. В результаті вимірювань встановлено, що в пластині кремнію p -типу при температурі $T = 500 \text{ K}$ спостерігається інверсія знаку коефіцієнта Холла. Знайти концентрацію акцепторів в напівпровіднику, якщо $\mu_n = 0,14 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, $\mu_p = 0,048 \text{ м}^2 \cdot (\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$, причому співвідношення рухливостей залишається незмінним в усьому температурному інтервалі вимірювань; при $T = 300 \text{ K}$, ширина його забороненої зони $\Delta E_g = 1,12 \text{ эВ}$, а ефективні маси густини станів $m_v = 0,56m_0$, $m_c = 1,05m_0$

Розв'язок: Згідно з умовами завдання при $T = 500 \text{ K}$ спостерігається інверсія знаку коефіцієнта Холла, тобто ця температура є температурою інверсії знаку коефіцієнта Холла (T_i), а значить, при цій температурі коефіцієнт Холла дорівнює нулю. Тоді співвідношення рухливості електронів до рухливості дірок в кремнії запишемо як:

$$b = \mu_n / \mu_p = 0,14 / 0,048 = 35 / 12 = 2,9166\dots,$$

А співвідношення концентрації дірок до концентрації електронів:

$$p / n = b^2 = 35^2 / 12^2 = 1225 / 144 \approx 8,507.$$

Підставляючи отримане значення в закон діючих мас, отримаємо:

$$n_{i(T_i)}^2 = pn = p^2 / b^2 \text{ або } n_{i(T_i)} = p / b.$$

З останнього виразу отримаємо значення концентрації дірок при температурі T_i :

$$p = b \cdot n_{i(T_i)}.$$

Як відомо, концентрація власних носіїв заряду визначається як:

$$n_i = 4h^{-3} \sqrt{2\pi^3 k_B^3 T^3 (m_c m_v)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta E_{g0} - k_E T}{2k_B T}\right),$$

де $k_E = 2,84 \cdot 10^{-4} \text{ эВ} / \text{K}$ – фактор температурного зменшення ширини забороненої зони, ΔE_{g0} – ширина забороненої зони при 0 K , яку визначимо за формулою:

$$\Delta E_{g0} = \Delta E_{g300} - bT = 1,12 - (-2,84 \cdot 10^{-4} \cdot 300) = 1,2052 \text{ эВ} \approx 1,2 \text{ эВ}.$$

При температурі T_i отримаємо:

$$n_{i(T_i)} = 4 \sqrt{\frac{2 \cdot \pi^3 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 500^3 \cdot (1,05 \cdot 0,56)^{3/2}}{(6,626 \cdot 10^{-34})^3}} e^{\frac{-1,602 \cdot 10^{-19} (1,20 - 2,84 \cdot 10^{-4} \cdot 500)}{2 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 500}} = 1,600 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3},$$

та, відповідно, концентрація дірок дорівнює:

$$p = b \cdot n_{i(T_i)} = 35 / 12 \cdot 1,600 \cdot 10^{20} = 4,667 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

Шукану концентрацію акцепторів можна знайти за концентрації дірок, тобто

$$N_A \approx p \approx 4,667 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

З виразу для значення концентрації дірок

$$p = \left(N_A + \sqrt{N_A^2 + 4n_i^2} \right) / 2,$$

отримаємо вираз для визначення концентрації акцепторів:

$$N_A = p - n_i^2 / p = 4,667 \cdot 10^{20} - (1,600 \cdot 10^{20})^2 / (4,667 \cdot 10^{20}) = 4,119 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}.$$

Розділ 3.3 Термоелектричні явища

Задача 1. Визначити напруженість електричного поля, що виникає в зазорі між пластинами плоского конденсатора, одна з яких виготовлена з алюмінію, а інша з платини. Пластини з'єднані між собою мідним дротом, а довжина зазору $l = 5$ мм. Робота виходу електронів з алюмінію, міді і платини становить відповідно 4,25, 4,4 і 5,32 еВ. Як зміниться напруженість поля, якщо алюмінієву і мідну пластини закоротити проводом з платини при тій же довжині зазору?

Розв'язок: Різниця потенціалів на кінцях послідовної різнорідної ланцюга визначається різницею в роботах виходу електронів з крайніх провідників і не залежить від числа і складу проміжних ланок. Тому в першому випадку

$$E_1 = \frac{A_{Al} - A_{Pt}}{ql} = \frac{4,25 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} - 5,32 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = -214 \text{ В / м ,}$$

у другому

$$E_2 = \frac{A_{Al} - A_{Cu}}{ql} = \frac{4,25 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} - 4,4 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = -30 \text{ В / К .}$$

Шукану відносну зміну напруженості електричного поля оцінимо за формулою:

$$\delta_E = \left| \frac{|E_1| - |E_2|}{|E_1|} \right| \cdot 100 \% = \frac{||-214| - |-30||}{|-214|} \cdot 100 \% = 85,98 \% \approx 86 \% ,$$

тобто величина електричного поля в другому випадку буде менше в порівнянні з першим випадком у $\left| \frac{E_1}{E_2} \right| = \left| \frac{-214}{-30} \right| = 7,133$ разів.

Задача 2. Яка різниця потенціалів виникає між кінцями зразка власного германію при його нерівномірному нагріванні, якщо перепад температури за зразком, а температура більш холодного кінця дорівнює 500 К? $\Delta E_g = 0,665$ еВ, ефективні маси густини станів $m_v = 0,388 \cdot m_0$, $m_c = 0,550 \cdot m_0$. Співвідношення рухливостей носіїв заряду $b = \mu_n / \mu_p$ прийняти рівним двом.

Розв'язок: Величина абсолютної термо-ЕРС для випадку власного напівпровідника визначається як:

$$\alpha = -\frac{k_B}{q} \left(\frac{b-1}{b+1} \right) \cdot \left[(2+r) + \frac{\Delta E_g}{k_B T} \right].$$

Оскільки германій - ковалентний кристал, то параметр розсіювання слід прирівняти нулю ($r = 0$). Обчислимо величину абсолютної термо-ЕРС:

$$\alpha = -\frac{1,38 \cdot 10^{-23}}{1,60 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{2-1}{2+1} \cdot \left[(2+0) + \frac{0,665 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 500} \right] = -2,79 \cdot 10^{-4} \text{ В / К} = -0,279 \text{ мВ / К} .$$

Визначимо шукану різницю потенціалів:

$$\Delta U_T = |\alpha \cdot \Delta T| = |-2,79 \cdot 10^{-4} \cdot 10| = 2,79 \cdot 10^{-3} \text{ В / К} = 2,79 \text{ мВ / К} .$$

Задача 3. Обчислити абсолютну термо-ЕРС для кремнію *n*-типу з концентрацією фосфору $N_D = 1 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$ при температурі $T = 300$ К. На скільки зміниться значення термо-ЕРС, якщо температуру напівпровідника підвищити до 400 К.

Розв'язок: Величина абсолютної термо-ЕРС для випадку електронного напівпровідника визначається як:

$$\alpha = \frac{k_B}{q} \left(2 + r + \ln \frac{N_C}{N_D} \right).$$

Оскільки кремній - ковалентний кристал, то параметр розсіювання слід прирівняти нулю

($r = 0$) і, отже, формула набуває вигляду:

$$\alpha = \frac{k_B}{q} \left(2 + \ln \frac{N_C}{N_D} \right).$$

Припускаючи, що значення ефективної маси електрона дуже слабо залежить від температури і дорівнює $m_n^* = 1,05 \cdot m_0$, визначимо щільності станів в зоні провідності кремнію при зазначених температурах за формулою:

$$N_C = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{2/3}.$$

Для температури в 300 К отримаємо:

$$N_{C(300\text{ K})} = 2 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 1,05 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{(6,626 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{2/3} = 2,700 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

і для температури в 400 К:

$$N_{C(400\text{ K})} = 2 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 1,05 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 400}{(6,626 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{2/3} = 4,157 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$$

Перейдемо до знаходження шуканих значень абсолютної термо-ЕРС:

- при температурі в 300 К отримаємо

$$\alpha_{300\text{ K}} = -\frac{1,381 \cdot 10^{-23}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(2 + \ln \frac{2,700 \cdot 10^{25}}{1 \cdot 10^{22}} \right) = 8,53 \cdot 10^{-6} \text{ В / К} = 8,53 \text{ мкВ / К};$$

- при температурі 400 К отримаємо

$$\alpha_{400\text{ K}} = -\frac{1,381 \cdot 10^{-23}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(2 + \ln \frac{4,157 \cdot 10^{25}}{1 \cdot 10^{22}} \right) = 8,90 \cdot 10^{-6} \text{ В / К} = 8,90 \text{ мкВ / К}.$$

Шукане зміна величини термо-ерс оцінимо за формулою:

$$\delta_\alpha = \left| \alpha_{300\text{ K}} - \alpha_{400\text{ K}} \right| / \alpha_{300\text{ K}} \cdot 100\% = \frac{|8,53 - 8,90|}{8,53} \cdot 100\% = 4,36\%.$$

Задача 4. При перепаді температури $\Delta T = 3 \text{ К}$ по товщині кремнієвої пластини n -типу між площинами зразка виникає термо-ЕРС $\Delta U_T = 2,5 \text{ мВ}$. Визначити концентрацію донорів в матеріалі, якщо середня температура зразка $T = 500 \text{ К}$.

Розв'язок: Величина абсолютної термо-ЕРС для випадку електронного напівпровідника визначається як:

$$\alpha = \frac{k_B}{q} \left(2 + r + \ln \frac{N_C}{N_D} \right).$$

Дозволивши це рівняння щодо N_D отримає:

$$N_D = N_C \exp \left(2 + r - \frac{q\alpha}{k_B} \right)$$

і врахувавши, що $\alpha = \Delta U / \Delta T$, остаточно отримаємо

$$N_D = N_C \exp \left(2 + r - \frac{q\Delta U}{k_B \Delta T} \right)$$

Припускаючи, що ефективна маса електрона дуже слабо залежить від температури і дорівнює $m_n^* = 1,05 \cdot m_0$ визначимо щільності станів в зоні провідності кремнію при зазначених температурах за формулою:

$$N_C = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_n^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2},$$

тобто

$$N_C = 2 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 1,05 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 500}{(6,626 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{3/2} = 5,809 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Врахувавши той факт, що кремній - ковалентний кристал, або, інакше кажучи, що параметр розсіювання слід вважати рівним нулю ($r = 0$), обчислимо шукану концентрацію донорів:

$$N_D = 5,809 \cdot 10^{25} e^{2+0 - \frac{1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 3}} = 2,709 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Задача 5. Чому значення термо-ЕРС напівпровідників різко зменшуються при переході від домішкової до власної електропровідності? Який знак термо-ЕРС напівпровідників з власної електропровідністю? В яких умовах питомо термо-ЕРС дорівнює нулю?

Відповідь: Оскільки причиною виникнення термо-ЕРС є температурний градієнт концентрації носіїв заряду, то власна величина термо-ЕРС визначається концентрацією носіїв того чи іншого знаку. У загальному випадку, термо-ЕРС, створювана електронами, компенсується термо-ЕРС, створюваної дірками в силу створення ними протилежних електричних полів. Отже, слід очікувати різкого зменшення величини термо-ЕРС при переході від домішкового напівпровідника до власного. Більш того із зазначеного можна було б припустити, що у власному напівпровіднику, тобто в напівпровіднику з рівною концентрацією електронів і дірок, термо-ЕРС повинна бути рівною нулю. Але в дійсності електрони і дірки мають різні властивості і головна відмінність полягає у величині їх рухливості. Таким чином, умовою звернення величини абсолютної термо-ЕРС в нуль буде умова $\sigma_n \alpha_n - \sigma_p \alpha_p = 0$, де σ_n і σ_p – відповідно електронна і діркова складові повної провідності напівпровідника, та α_n і α_p – відповідно електронна і діркова термо-ЕРС.

Задача 6. Є два кристала германію р-типу з концентрацією акцепторів $N_{A1} = 1 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$ $N_{A2} = 1 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$. У скільки разів відрізняються значення абсолютної термо-ЕРС цих кристалів при кімнатній температурі?

Розв'язок: Величина абсолютної термо-ЕРС для випадку діркового напівпровідника визначається як:

$$\alpha = \frac{k_B}{q} \left(2 + r + \ln \frac{N_V}{N_A} \right).$$

Оскільки германій - ковалентний кристал, то параметр розсіювання слід прирівняти нулю ($r = 0$) і, отже, формула набуде вигляду:

$$\alpha = \frac{k_B}{q} \left(2 + \ln \frac{N_V}{N_A} \right).$$

Припускаючи, що ефективна маса дірки дуже слабо залежить від температури і дорівнює $m_p^* = 0,388 \cdot m_0$ визначимо щільності станів у валентній зоні за формулою:

$$N_V = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$$

і при кімнатній температурі (300 К) отримаємо:

$$N_V = 2 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 0,388 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{(6,626 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{3/2} = 2,700 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Обчислимо значення абсолютної термо-ЕРС для зазначених концентрацій:

– для концентрації $N_{A1} = 1 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$:

$$\alpha_1 = \frac{1,381 \cdot 10^{-23}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(2 + \ln \frac{2,7 \cdot 10^{25}}{1 \cdot 10^{20}} \right) = 1,1213 \cdot 10^{-3} \text{ В / К} = 1,1213 \text{ мВ / К};$$

– для концентрації $N_{A2} = 1 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}$:

$$\alpha_2 = \frac{1,381 \cdot 10^{-23}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(2 + \ln \frac{2,7 \cdot 10^{25}}{1 \cdot 10^{22}} \right) = 0,7245 \cdot 10^{-3} \text{ В / К} = 0,7245 \text{ мВ / К}.$$

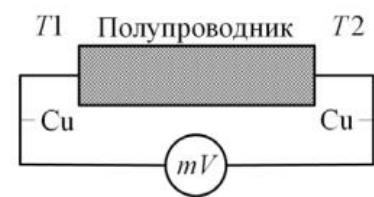
Шукане відношення складе:

$$\alpha_1 / \alpha_2 = \frac{1,1213}{0,7245} = 1,548.$$

Задача 7. Визначити напрямок термо-ЕРС в напівпровіднику, обумовленим тим, що його кінці знаходяться при різних температурах, якщо відомо, що основними носіями заряду в напівпровіднику є дірки.

Відповідь: Нагадаємо, що знак термо-ЕРС вважається негативним, тоді і тільки тоді, коли гарячий кінець провідника заряджений позитивно, тобто термо-ЕРС спрямована від гарячого кінця до холодного. Цей випадок характерний для більшості металів і електронних напівпровідників. В силу дуалізму, в дірковому напівпровіднику повинна спостерігатися протилежна картина, а саме, гарячий кінець буде заряджений негативно, тобто термо-ЕРС буде спрямована від холодного кінця до гарячого.

Задача 8. На рисунку показана схема для дослідження термоелектричного ефекту в напівпровідниках. Обчислити при середній температурі $T = 300 \text{ К}$, наскільки відрізняється відносна термо-ЕРС термопари мідь-напівпровідник і абсолютна термо-ЕРС напівпровідника, в якості якого взятий кремній p -типу з концентрацією дрібних акцепторів $N_A = 1 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$.



Розв'язок: Оскільки абсолютна термо-ЕРС міді - негативна, а діркового кремнію - позитивна, то шукана відносна термо-ЕРС термопари p -Si-Cu запишеться як:

$$\alpha_{Si(p)-Cu} = \left| \alpha_{Si(p)} \right| - \left| \alpha_{Cu} \right|,$$

отже, відносна термо-ЕРС термопари n -Si-Cu і абсолютна термо-ЕРС кремнію відрізняються на величину абсолютної термо-ЕРС міді ($\left| \alpha_{Cu} \right|$).

Скориставшись довідковими даними, отримаємо для міді: щільність $\rho_{Cu} = 8,92 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3$, маса одного атома міді $m_{Cu} = 1,055 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$. Знаючи ці параметри, легко визначити концентрацію атомів міді:

$$N_{Cu} = \rho_{Cu} / m_{Cu} = \frac{8,92 \cdot 10^3}{1,055 \cdot 10^{-25}} = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Вважаючи, що кожен атом міді одноразово іонізований, знайдемо концентрацію електронів в міді:

$$n_{Cu} = N_{Cu} = 8,45 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Тоді енергія рівня Фермі знайдеться як:

$$E_{F(Cu)} = \frac{h^2}{8m_0} \left(\frac{3n_{Cu}}{\pi} \right)^{2/3}$$

і її значення буде рівним

$$E_{F(Cu)} = \frac{(6,626 \cdot 10^{-34})^2}{8,9 \cdot 109 \cdot 10^{-31}} \cdot \left(\frac{3 \cdot 8,45 \cdot 10^{28}}{\pi} \right)^{2/3} = 1,125 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 7,025 \text{ эВ}.$$

Визначимо абсолютну величину термо-ЕРС міді за формулою (фактор ізоляваності $f = 0$):

$$\alpha_{Cu} = \frac{\pi^2 k_B^2 T}{3^{1-f} q E_{F(Cu)}} = \frac{\pi^2 (1,381 \cdot 10^{-23})^2 300}{3^{1-0} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1,125 \cdot 10^{-18}} \approx 1,043 \cdot 10^{-6} \text{ В / К} = 1,043 \text{ мкВ / К}.$$

Припускаючи, що ефективна маса дірки дуже слабо залежить від температури і дорівнює $m_p^* = 0,560 \cdot m_0$ визначимо щільності станів у валентній зоні за формулою:

$$N_V = 2 \cdot \left(\frac{2\pi m_p^* k_B T}{h^2} \right)^{2/3}$$

і при кімнатній температурі (300 К) отримаємо:

$$N_V = 2 \cdot \left(\frac{2\pi \cdot 0,560 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{(6,626 \cdot 10^{-34})^2} \right)^{2/3} = 1,052 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Обчислимо значення абсолютної термо-ЕРС кремнію:

$$\alpha_{Si(n)} = \frac{k_B}{q} \left(2 + \ln \frac{N_V}{N_A} \right) = \frac{1,381 \cdot 10^{-23}}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \left(2 + \ln \frac{1,052 \cdot 10^{25}}{1 \cdot 10^{21}} \right) \approx 970,37 \cdot 10^{-6} \text{ В / К} = 970,37 \text{ мкВ / К}.$$

Отже, шукана відносна термо-ЕРС термопари p-Si-Cu:

$$\alpha_{Si(p)-Cu} = \left| \alpha_{Si(p)} \right| - \left| \alpha_{Cu} \right| = 970,37 - 1,04 = 969,33 \text{ мкВ / К}.$$

Задача 9. При протіканні струму через власний напівпровідник під дією поперечного магнітного поля відбувається відхилення електронів і дірок до однієї і тієї ж бічної грані зразка. Поле Холла, яке при цьому виникає, не може перешкодити одночасному поперечному зсуву електронів і дірок. Поясніть, яким чином в напівпровіднику досягається стан динамічної рівноваги і у бічних граней не відбувається нескінченного накопичення носіїв заряду?

Відповідь: Термодинамічна рівновага досягається за рахунок збільшення ймовірності як об'ємної так і поверхневої рекомбінації, що веде до замикання ліній струму відхилених носіїв заряду і, як наслідок, до неможливості їх накопичення у бічних граней.

Задача 10. Визначити зовнішню контактну різницю потенціалів, що виникає при з'єднанні двох металів з концентрацією вільних електронів $n_1 = 5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ і $n_2 = 1 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$.

Розв'язок: Визначимо сферичні радіуси електронів по формулі:

$$r_s = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}.$$

Для першого металу отримаємо:

$$r_{s1} = \left(\frac{3}{4\pi \cdot 5 \cdot 10^{28}} \right)^{1/3} \approx 1,6839 \cdot 10^{-10} \text{ м}$$

а для другого

$$r_{s2} = \left(\frac{3}{4\pi \cdot 1 \cdot 10^{29}} \right)^{1/3} \approx 1,3365 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Визначимо величини рівнів Фермі за формулою:

$$E_F = \frac{3}{32} \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/3} \frac{q^2}{\epsilon_0 r_B} \left(\frac{r_B}{r_s} \right)^2,$$

де $r_B = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_0 q^2} \approx 5,29177 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ – радіус першої борівської орбіти.

Для першого металу отримаємо

$$E_{F1} = \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2}{8,85419 \cdot 10^{-12} \cdot 5,29177 \cdot 10^{-11}} \cdot \left(\frac{5,29177 \cdot 10^{-11}}{1,6839 \cdot 10^{-10}} \right)^2 \approx 7,929 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

а для другого

$$E_{F2} = \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2}{8,85419 \cdot 10^{-12} \cdot 5,29177 \cdot 10^{-11}} \cdot \left(\frac{5,29177 \cdot 10^{-11}}{1,3365 \cdot 10^{-10}} \right)^2 \approx 1,2587 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Визначимо потрібну зовнішню контактну різницю потенціалів:

$$U_K = \left| E_{F1} - E_{F2} \right| / q \approx \frac{|7,929 \cdot 10^{-19} - 1,2587 \cdot 10^{-18}|}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 2,908 \text{ В}.$$

Задача 11. Чому різниця потенціалів, що виникає при контакті двох різних металів, не можна виміряти за допомогою вольтметра?

Відповідь: Розглянемо термодинамічну систему з двох контактуючих речовин. У загальному випадку, процес утворення такої системи не може бути термодинамічно рівноважним, оскільки рівні Фермі двох різних речовин - різні. В силу цього, для досягнення рівноваги виникне дифузний обмін вільними електричними зарядами, який викличе появу на межі поділу електричного поля, яке в свою чергу призведе до виникнення дрейфового обміну носіями електричного заряду. Зазначені процеси будуть впливати один на одного до тих пір, поки дифузний і дрейфовий обміни не зрівняються по абсолютній величині, тобто система не опиниться в стані термодинамічної рівноваги. У цьому стані, загальний струм через кордон розділу буде дорівнює нулю. Ситуація не зміниться навіть в разі формування замкнутого кола, що складається з розглянутих речовин. В силу цього, контактна різниця потенціалів не є електрорушійною силою, тобто НЕ створює електричного струму в замкнутому колі, і, отже, стані термодинамічної рівноваги не може бути виміряна методом вольтметра.

Задача 12. В яких умовах можлива поява термо-ЕРС в замкнутому колі? Назвіть основні механізми, відповідальні за виникнення термо-ЕРС.

Відповідь: Поява термо-ЕРС в замкнутому колі можлива лише в разі порушення термодинамічної рівноваги в колі, наприклад, при різній температурі контактів замкнутого кола (див. попередню задачу). Основні фізичні причини, що викликають термо-ЕРС:

1. відмінності у величині середньої енергії електронів при одній і тій же температурі в хімічно різних речовинах;
2. відмінності в температурній залежності величини рівня Фермі в хімічно різних речовинах;
3. фононне захоплення електронів (переважає при низьких температурах).

Задача 13. Струм в колі, що складається з термопар опором 5 Ом, гальванометра опором 8 Ом, дорівнює 0,5 мА, в разі, коли спай термопар поміщений в посудину з киплячою водою. Чому дорівнює питома термо-ЕРС термопар при температурі навколишнього середовища 20 °С?

Розв'язок: Визначимо значення термо-ЕРС в даному колі за формулою:

$$u_T = i \cdot (R_G + R) = 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot (5 + 8) = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 6500 \text{ мкВ} .$$

Визначимо різницю температур як:

$$\Delta T = T_2^C - T_1^C = 100 - 20 = 80 \text{ К} .$$

Визначимо відносну термо-ЕРС термопар за формулою:

$$\alpha = u_T / \Delta T = \frac{6500}{80} = 81,25 \text{ мкВ} / \text{К} .$$

Оскільки відносна термо-ЕРС термопар є лінійною функцією від абсолютної температури, то знайдемо коефіцієнт пропорційності цієї залежності:

$$k_\alpha = \alpha / T_2 = \alpha / (T_2^C + 273,15) = \frac{81,25}{100 + 273,15} = 0,2177 \text{ мкВ} / \text{К}^2 .$$

Шукана величина питомої термо-ЕРС при температурі 20 °С:

$$\alpha_{20^\circ\text{C}} = k_\alpha T_1 = k_\alpha (T_1^C + 273,15) = 0,2177 \cdot (20 + 273,15) = 63,83 \text{ мкВ} / \text{К} .$$

Задача 14. Визначити значення абсолютної питомої термо-ЕРС при температурі $T = 300 \text{ К}$ для металу з концентрацією вільних електронів $n = 6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

Розв'язок: Визначимо сферичний радіус електрона за формулою:

$$r_s = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} n^{-1/3} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} (6 \cdot 10^{28})^{-1/3} \approx 1,5846 \cdot 10^{-10} \text{ м} .$$

Знаючи радіус першої борівської орбіти $r_B = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_0 q^2} \approx 5,29177 \cdot 10^{-11} \text{ м}$, визначимо величину рівня Фермі по формулі:

$$E_F = \frac{3}{32} \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/3} \frac{q^2}{\varepsilon_0 r_B} \left(\frac{r_B}{r_S} \right)^2 = \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{12}{\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2}{8,85419 \cdot 10^{-12} \cdot 5,29177 \cdot 10^{-11}} \cdot \left(\frac{5,29177 \cdot 10^{-11}}{1,5846 \cdot 10^{-10}} \right)^2 \approx 8,954 \cdot 10^{-19} \text{ Дж},$$

Оскільки шукаємо термо-ЕРС ізольованого зразка, то фактор ізольованості слід покласти рівним одиниці ($f = 1$). Шукана абсолютна питома термо-ЕРС знайдеться як:

$$\alpha = \frac{\pi^2 k_B^2 T}{3^{1-f} q E_F} = \frac{\pi^2 (1,381 \cdot 10^{-23})^2 300}{3^{1-1} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 8,954 \cdot 10^{-18}} = 3,934 \cdot 10^{-6} \text{ В / К} \approx 4 \text{ мкВ / К}.$$

Задача 15. Один спай терморпарі поміщений в ніч з терморпарою 200°С , інший перебуває при температурі 20°С . Вольтметр показує при цьому термо-ЕРС $1,8 \text{ мВ}$. Чому дорівнює термо-ЕРС, якщо другий спай терморпарі помістити в посудину: а) з льодом що тане; б) з киплячою водою. Відносну питому термо-ЕРС у всьому температурному діапазоні $0-200^\circ \text{С}$ вважати постійною.

Розв'язок: Визначимо відносну термо-ЕРС як:

$$\alpha = u_T / (T_2 - T_1) = \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{200 - 20} = 10^{-5} \text{ В / К} = 10 \text{ мкВ / К}$$

Термо-ЕРС при інших температурах визначиться як:

$$\Delta U_{X^\circ \text{C}} = \alpha (T_2 - T_X)$$

У першому випадку (лід що тане) отримаємо:

$$\Delta U_{0^\circ \text{C}} = 10 \cdot (200 - 0) = 2000 \text{ мкВ} = 2 \text{ мВ},$$

У в другому випадку (кипляча вода) отримаємо:

$$\Delta U_{100^\circ \text{C}} = 10 \cdot (200 - 100) = 1000 \text{ мкВ} = 1 \text{ мВ}.$$

Задача 16. Доведіть, що термо-ЕРС терморпарі, спаї якої мають температуру T_3 і T_1 , є алгебраїчною сумою двох термо-ЕРС цієї ж терморпарі: одна з них відповідає температурам спаїв T_3 і T_2 , інша - температур T_2 і T_1 .

Доведення: Припустимо, що $T_3 > T_2 > T_1$. Термо-ЕРС терморпарі з температурами спаїв рівній T_3 і T_1 , розраховується за формулою $\Delta U_{3-1} = \alpha (T_3 - T_1)$. Поступаючи аналогічно отримаємо для решти випадків: $\Delta U_{2-1} = \alpha (T_2 - T_1)$ і $\Delta U_{3-2} = \alpha (T_3 - T_2)$. В такому випадку, термо-ЕРС при температурі буде дорівнює:

$$\Delta U_{3-1} = \Delta U_{3-2} + \Delta U_{2-1}.$$

Підставивши сюди відповідні значення, отримаємо:

$$\Delta U_{3-1} = \alpha (T_3 - T_2) + \alpha (T_2 - T_1) = \alpha (T_3 - T_2 + T_2 - T_1) = \alpha (T_3 - T_1),$$

що й потрібно було довести.

Задача 17. При зміні температури в печі за допомогою терморпарі вольтметр показав $7,82 \text{ мВ}$. Температура холодного спаю терморпарі була стабілізована на рівні 100°С . Користуючись градуйованою таблицею для даної терморпарі (див. нижче), Визначити температуру в печі.

$T, ^\circ \text{C}$	0	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
ТермоЕРС, мВ	0	0,11	0,65	1,44	2,23	3,33	4,23	5,24	6,27	7,34	8,47	9,61

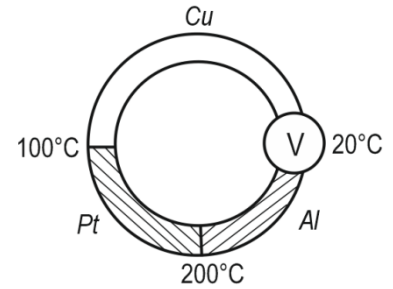
Розв'язок: Оскільки градуйована характеристика знята при температурі холодного спаю рівною 0°С , а показання вольтметра відповідають температурі холодного спаю, яка дорівнює 100°С , то необхідний перерахунок показань вольтметра. Відповідно до правила складання відносних термо-ЕРС (див. попередню задачу) отримаємо:

$$\Delta U_{x^{\circ}\text{C}-0^{\circ}\text{C}} = \Delta U_{x^{\circ}\text{C}-100^{\circ}\text{C}} + \Delta U_{100^{\circ}\text{C}-0^{\circ}\text{C}} = 7,82 + 0,65 = 8,47 \text{ мВ}.$$

Порівнявши отримане значення з даними градуїрованою характеристики термопари (див. таблицю), знайдемо величину шуканої температури в печі:

$$T = 900^{\circ}\text{C}.$$

Задача 18. У замкнуту колі, що складається з мідного, алюмінієвого та платинового провідників, включений мілівольтметр (див. рисунок). Яку термо-ЕРС покаже прилад при температурі спаїв, зазначених на малюнку, якщо для міді абсолютна питома термо-ЕРС $1,8 \text{ мкВ} / \text{К}$, для алюмінію $-1,3 \text{ мкВ} / \text{К}$, для платини $-5,1 \text{ мкВ} / \text{К}$. Визначити питому термо-ЕРС алюмінію щодо міді і щодо платини.



Розв'язок: Визначимо величину абсолютної термо-ерс на кожній ділянці цього ланцюга по формулі:

$$E = \alpha \Delta T.$$

відповідно отримаємо:

$$\begin{aligned} E_{Cu} &= 1,8 \cdot (100 - 20) = 144 \text{ мкВ}, \\ E_{Al} &= -1,3 \cdot (200 - 20) = -234 \text{ мкВ}, \\ E_{Pt} &= 1,8 \cdot (200 - 100) = -510 \text{ мкВ}. \end{aligned}$$

Згідно з правилами, полярності, що виникають в ланцюзі термо-ЕРС, будуть такими як показано на наступному рис.

В силу останнього, шукану термо-ЕРС, яку покаже вольтметр, слід обчислювати так:

$$U_T = |E_{Cu}| + |E_{Al}| - |E_{Pt}| = |144| + |-234| - |-510| = |-132| = 132 \text{ мкВ}.$$

Визначимо відносні термо-ЕРС складових ланцюга металів по відношенню до алюмінію за формулою:

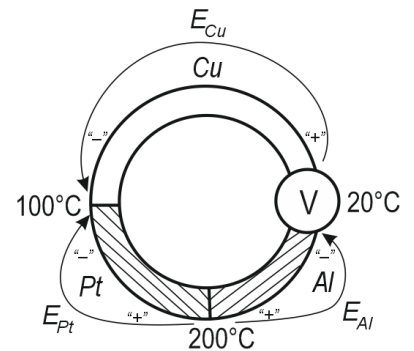
$$\alpha_{Al-X} = \alpha_{Al} - \alpha_X,$$

в разі міді отримаємо:

$$\alpha_{Al-Cu} = \alpha_{Al} - \alpha_{Cu} = -1,3 - 1,8 = -3,1 \text{ мкВ} / \text{К},$$

і для платини:

$$\alpha_{Al-Pt} = \alpha_{Al} - \alpha_{Pt} = -1,3 - (-5,1) = +3,8 \text{ мкВ} / \text{К}.$$



Задача 19. Обчислити питому теплоємність міді при температурі 1000 К . Зобразите якісно на графіку, як буде змінюватися питома теплоємність міді при зниженні температури.

Розв'язок: Випишемо необхідні в подальшому довідкові дані фізичних величин для міді: щільність $\rho_{Cu} = 8,92 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$, маса одного атома міді $m_{Cu} = 1,055 \cdot 10^{-25} \text{ кг}$, температура Дебая $\theta_D = 343 \text{ К}$.

Загальна теплоємність металу складається з теплоємності обумовленої тепловими коливаннями решітки (C_L) і теплоємності електронного газу (C_E): $C = C_L + C_E$.

Враховавши той факт, що внесок електронної складової необхідно враховувати лише при температурах близьких до абсолютного нуля і враховавши температурну умову задачі (1000 К) прийдемо до висновку, що внеском електронної складової можна знехтувати, оскільки $C_L \gg C_E$, тобто $C = C_L$.

Для знаходження C_L скористаємося моделлю Дебая, згідно з якою сильна залежність теплоємності від температури проявляється при температурах $T < \theta_D$, і, навпаки, при температурах $T > \theta_D$ питома молярна теплоємність може бути визначена за законом Дюлонга-Пті:

$$C_{\mu} = 3 \cdot R = 3 \cdot 8,314472 \text{ Дж} \cdot (\text{моль} \cdot \text{К})^{-1} = 24,943416 \text{ Дж} \cdot (\text{моль} \cdot \text{К})^{-1}.$$

з нерівності $T = 1000 \text{ К} > \theta_D = 343 \text{ К}$ відразу випливає, що питому молярну теплоємність міді можна визначити за законом Дюлонга-Пті, тобто

$$C_{\mu}^{Cu} = 24,943416 \text{ Дж} \cdot (\text{моль} \cdot \text{К})^{-1}.$$

Щоб, знайти решту питомих теплоємностей (масову і об'ємну) необхідно знати масу одного атома міді і обсяг займаний одним атомом міді. Оскільки перша з необхідних величин відома, то залишилося лише визначити другу:

$$V_{Cu} = m_{Cu} / \rho_{Cu} = \frac{1,055 \cdot 10^{-25}}{8,92 \cdot 10^3} = 1,183 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3.$$

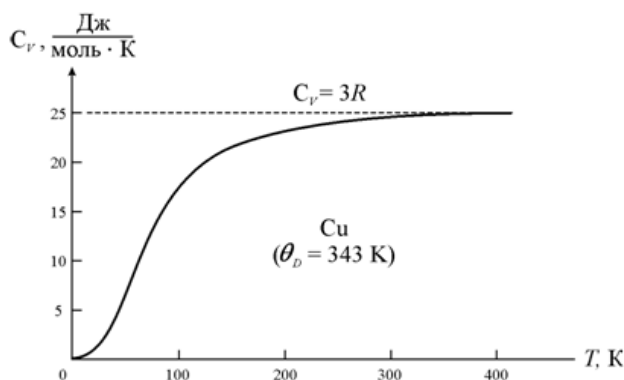
Визначимо питому масову теплоємність міді:

$$C_m^{Cu} = \frac{C_{\mu}^{Cu}}{m_{Cu} N_A} = \frac{24,943}{1,055 \cdot 10^{-25} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}} = 392,5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Визначимо питому об'ємну теплоємність міді:

$$C_v^{Cu} = \frac{C_{\mu}^{Cu}}{V_{Cu} N_A} = \frac{24,943}{1,183 \cdot 10^{-29} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}} = 3,50 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}}.$$

Графік залежності теплоємності міді від температури наведено на наступному рис.



Задача 20. Користуючись законом Видемана-Франца визначити відношення питомих теплопровідності срібла і олова при температурах: 20°С і 200°С . Прийняти, що при температурі 20°С питомі опори срібла і олова рівні с $0,015$ і $0,113 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$ відповідно, а температурні коефіцієнти питомого опору - $0,0041$ і $0,0045 \text{ 1/К}$ відповідно.

Розв'язок: Відповідно до закону Видемана-Франца величини питомих теплопровідності срібла і олова визначаються як:

$$\lambda_{Cu} = \sigma_{Cu} L_0 T = L_0 T / \rho_{Cu} \text{ и } \lambda_{Sn} = \sigma_{Sn} L_0 T = L_0 T / \rho_{Sn}.$$

Отже, шукане відношення питомих теплопровідності при 20°С можна знайти із загального виразу:

$$\lambda_{Cu} / \lambda_{Sn} = \rho_{Sn} / \rho_{Cu} = \frac{0,113}{0,015} = 7,533.$$

У разі температури рівної 200°С слід вчинити аналогічно, але з урахуванням підстановки питомих опорів міді та олова для цієї температури. Тоді отримаємо наступну залежність питомого опору від температури:

$$\rho_{X^\circ \text{C}} = \rho_{20^\circ \text{C}} (1 + \alpha_{20^\circ \text{C}} \Delta T),$$

де $\Delta T = T_2 - T_1 = 180^\circ \text{С}$. Визначимо величини питомих опорів міді і олова при 200°С :

$$\rho_{Cu(200^\circ \text{C})} = \rho_{Cu(20^\circ \text{C})} (1 + \alpha_{Cu(20^\circ \text{C})} \Delta T) = 0,015 \cdot (1 + 0,0044 \cdot 180) = 0,02688 \text{ мкОм} \cdot \text{м},$$

$$\rho_{Sn(200^\circ \text{C})} = \rho_{Sn(20^\circ \text{C})} (1 + \alpha_{Sn(20^\circ \text{C})} \Delta T) = 0,113 \cdot (1 + 0,0045 \cdot 180) = 0,20453 \text{ мкОм} \cdot \text{м}.$$

Обчислимо шукане відношення коефіцієнтів теплопровідності при 200°С :

$$\lambda_{Cu(200^\circ C)} / \lambda_{Sn(200^\circ C)} = \rho_{Sn(200^\circ C)} / \rho_{Cu(200^\circ C)} = \frac{0,20453}{0,02688} = 7,609 \approx 7,61.$$

Задача 21. Визначити у скільки разів зміниться питома теплопровідність міді при зміні температури ΔT від $20^\circ C$ до $200^\circ C$.

Розв'язок: Відповідно до закону Видемана-Франца величини питомих теплопровідності міді при двох різних температурах визначаються як:

$$\lambda_{T_0} = \sigma_{T_0} L_0 T_1 = L_0 T_0 / \rho_{T_0} \quad \text{и} \quad \lambda_{T_1} = \sigma_{T_1} L_0 T_1 = L_0 T_1 / \rho_{T_1}.$$

Отже, шукане відношення питомих теплопровідності запишеться як:

$$\frac{\lambda_{T_1}}{\lambda_{T_0}} = \frac{\rho_{T_0}}{\rho_{T_1}} \cdot \frac{T_1}{T_0} = \frac{\rho_{T_0}}{\rho_{T_0} (1 + \alpha_{Cu} \Delta T)} \cdot \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{1 + \alpha_{Cu} (T_1 - T_0)} \cdot \frac{T_1}{T_0}.$$

Припустивши, що $T_0 = 20^\circ C = 293,15 \text{ K}$, $T_1 = 200^\circ C = 473,15 \text{ K}$ і $\alpha_{Cu} = 0,004 \text{ K}^{-1}$, знайдемо шукане відношення: $\lambda_{T_1} / \lambda_{T_0} = \frac{1}{1 + 0,004 \cdot (473,15 - 293,15)} \cdot \frac{473,15}{293,15} = 0,938$.

Розділ 4 Контактні явища

Задача 1. Визначити ширину областей просторового заряду в кожній з областей p - n -переходу, загальну ширину області просторового заряду p - n -переходу і ємність p - n -переходу при $N_A = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $N_D = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 12,5$, $\Delta\varphi_K = 0,6 \text{ В}$, $S = 10^{-4} \text{ см}^2$.

Розв'язок: Ширина області просторового заряду p - n -переходу визначається з рішень рівняння Пуассона для кожної з областей p - n -переходу з відповідними граничними умовами в такий спосіб:

$$l_{pn} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon(\varphi_0 - U)}{q} \cdot \frac{N_D + N_A}{N_D N_A}}.$$

Області просторового заряду в p - і n -областях:

$$l_p = \frac{N_D}{N_A} \cdot \frac{l_{pn}}{(N_D + N_A)} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon(\varphi_0 - U)}{q(N_D + N_A)} \cdot \frac{N_D}{N_A}} \quad \text{и} \quad l_n = \frac{N_A}{N_D} \cdot \frac{l_{pn}}{(N_D + N_A)} = \sqrt{\frac{2\epsilon_0\epsilon(\varphi_0 - U)}{q(N_D + N_A)} \cdot \frac{N_A}{N_D}}.$$

Ємність p - n -переходу $C = \epsilon_0\epsilon S / l_{pn}$.

Підставивши отримані дані, отримаємо:

$$l_{pn} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 12,5 \cdot (0,6 - 0)}{1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{15} + 1,0 \cdot 10^{17}}{1,0 \cdot 10^{15} \cdot 1,0 \cdot 10^{17}}} = 9,15 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 0,915 \text{ мкм},$$

$$l_n = \frac{1,0 \cdot 10^{17}}{1,0 \cdot 10^{15}} \cdot \frac{l_{pn}}{1,0 \cdot 10^{15} + 1,0 \cdot 10^{17}} = 0,991 \cdot l_{pn} = 9,06 \cdot 10^{-5} \text{ см} = 0,906 \text{ мкм},$$

$$l_p = \frac{1,0 \cdot 10^{15}}{1,0 \cdot 10^{17}} \cdot \frac{l_{pn}}{1,0 \cdot 10^{15} + 1,0 \cdot 10^{17}} = 0,0991 \cdot l_{pn} = 9,06 \cdot 10^{-5} \text{ см} \approx 0,09 \text{ мкм},$$

$$C = 8,85 \cdot 10^{-12} / 100 \cdot 12,5 \cdot 10^{-4} / 9,15 / 10^{-3} = 1,21 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \approx 1,2 \text{ пФ}.$$

Задача 2. Визначити ширину області просторового заряду і ємність контакту метал-напівпровідник, якщо $N_D = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon = 12,5$, робота виходу з металу $\varphi_M = 4,6 \text{ эВ}$, робота виходу з напівпровідника $\varphi_S = 4,3 \text{ эВ}$, площа контакту $S = 10^{-4} \text{ см}^2$. Побудувати залежність області просторового заряду і ємності від прикладеної напруги.

Розв'язок: Графіки шуканих залежностей від зовнішньої напруги (ширини області просторового заряду і ємності контакту метал-напівпровідник):

Контактна різниця потенціалів дорівнює $\Delta\varphi_{MS} = \varphi_M - \varphi_S = 4,6 - 4,3 = 0,3 \text{ эВ}$.

Тоді ширина області просторового заряду в стані рівноваги знайдеться як:

$$w = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon(\Delta\varphi_{MS} - qU)}{qN_D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-14} \cdot 12,5 \cdot (0,3 - 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0)}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16}}} = 0,204 \cdot 10^{-6} \text{ м} \approx 0,2 \text{ мкм},$$

а ємність контакту метал-напівпровідник запишемо:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{w} = \frac{8,854 \cdot 10^{-14} \cdot 12,5}{\sqrt{4,145 \cdot 10^{-10} - 6,908 \cdot 10^{-10} \cdot 0}} \cdot 10^{-4} = 5,436 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 5,436 \text{ пФ}.$$

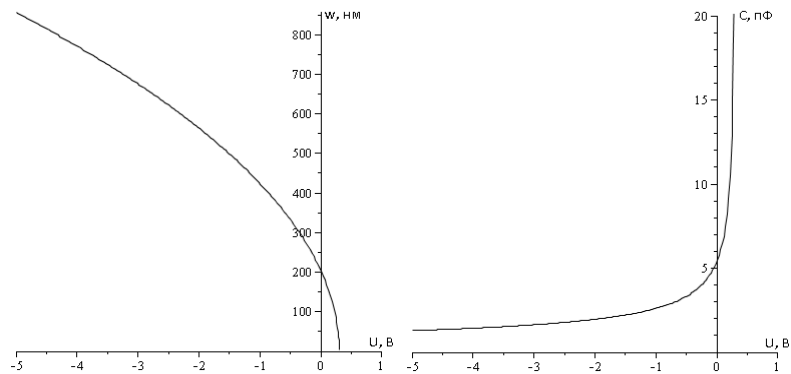
Формулу для розрахунку функціональної залежності ширини області просторового заряду від зовнішньої напруги, отримаємо у вигляді:

$$w(U) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon(\Delta\varphi_{MS} - qU)}{qN_D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,854 \cdot 10^{-14} \cdot 12,5 \cdot (0,3 - 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot U)}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16}}} = \sqrt{4,1448 \cdot 10^{-10} - 1,38159 \cdot 10^{-9} \cdot U}.$$

Аналогічно отримаємо формулу для функціональної залежності бар'єрної ємності p - n -переходу від зовнішньої напруги:

$$C(U) = \frac{8,854 \cdot 10^{-14} \cdot 12,5}{\sqrt{4,145 \cdot 10^{-10} - 6,908 \cdot 10^{-10} \cdot U}} \cdot 10^{-4} = \frac{1}{\sqrt{3,384 \cdot 10^{22} - 1,128 \cdot 10^{23} \cdot U}}.$$

Отже, шукані графічні залежності приймуть вид:



Задача 3. Побудувати вольтамперні характеристики контакту метал-напівпровідник при прямому і зворотному зміщенні при 300 K при роботі виходу з металу $\varphi_M = 4,6$ eB і роботі виходу з напівпровідника $\varphi_S = 4,3$ eB відповідно до діодної теорії при $N_0 = N_D = 10^{16} \text{ см}^{-3}$.

Розв'язок: Відповідно до діодної теорії:

$$j = j_s \left(e^{\frac{qU}{k_B T}} - 1 \right),$$

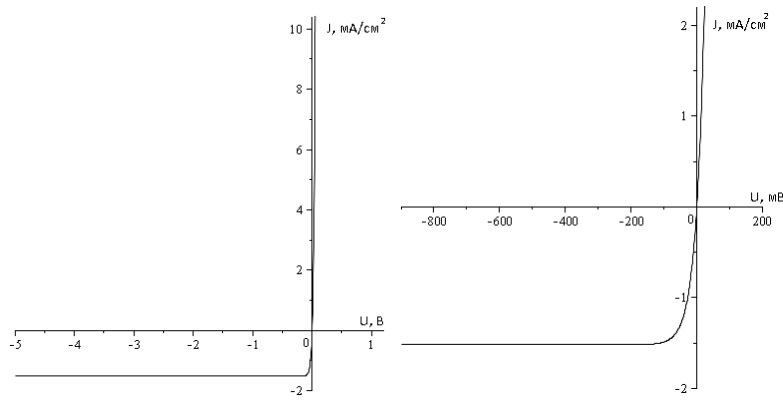
де $j_s = qn_s v_T / 4$ – струм насичення, $n_s = n_0 \exp\left(-\frac{\Delta\varphi_{MS}}{k_B T}\right)$ – концентраційне насичення,

$$v_T = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_n^*}} \text{ – теплова швидкість.}$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо:

$$j = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16}}{4} \cdot e^{\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (4,6 - 4,3)}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{\pi \cdot 0,067 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31}}} \cdot \left(e^{\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot U}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} - 1 \right) = 1,5194 \cdot 10^{-3} \cdot \left(e^{38,682U} - 1 \right).$$

Графіки шуканих залежностей струму від зовнішнього напруги (при відповідно, великих і малих зсувах):



Задача 4. Побудувати вольт-амперну характеристику p-n-переходу на основі германію при прямому і назад зміщенні при 300 K $p_p = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $D_n = 50 \text{ см}^2 / \text{с}$, $D_p = 100 \text{ см}^2 / \text{с}$, $L_p = 0,1 \text{ см}$, $L_n = 0,01 \text{ см}$. **Визначити коефіцієнт інжекції p-n-переходу.**

Розв'язок: Коефіцієнт інжекції p-n-переходу визначається як:

$$\gamma = \frac{j_p}{j_p + j_n} = \frac{D_p p_p L_n}{D_p p_p L_n + D_n p_n L_p} = \frac{D_p p_p L_n}{D_p p_p L_n + D_n \frac{n_i^2}{p_p} L_p} = \frac{100 \cdot 10^{17} \cdot 0,01}{100 \cdot 10^{17} \cdot 0,01 + 50 \cdot \frac{(1,25 \cdot 10^{13})^2}{10^{14}} \cdot 0,1} = 0,9804.$$

Визначимо величину щільності теплового струму:

$$j_0 = j_p + j_n = \frac{q D_p p_n}{L_p} + \frac{q D_n n_p}{L_n} = q \left(\frac{D_p n_i^2}{L_p p_p} + \frac{D_n n_i^2}{L_n n_n} \right).$$

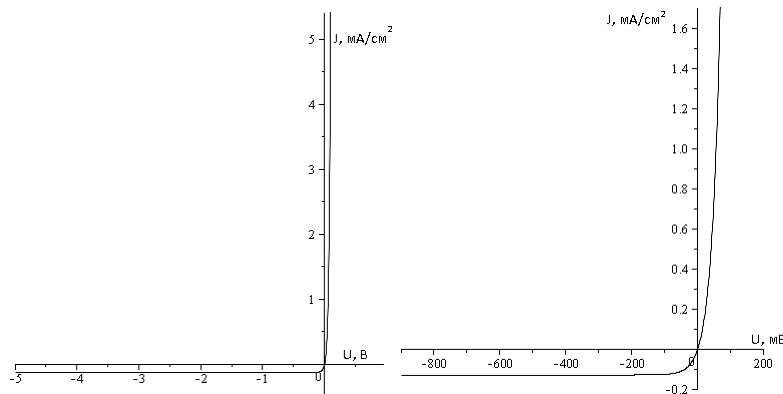
підставляючи вихідні дані, остаточно отримаємо:

$$j_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \left(\frac{100(1,25 \cdot 10^{13})^2}{0,1 \cdot 10^{17}} + \frac{50(1,25 \cdot 10^{13})^2}{0,01 \cdot 10^{14}} \right) = 1,2767 \cdot 10^{-4} \text{ A} / \text{см}^2.$$

Тоді запишемо загальний вид залежності щільності струму від напруги:

$$j = j_0 \left(e^{\frac{qU}{k_B T}} - 1 \right) = 1,2767 \cdot 10^{-4} \cdot \left(e^{\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot U}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} - 1 \right) = 1,2767 \cdot 10^{-4} \cdot (e^{38,682 \cdot U} - 1).$$

Графіки шуканих залежностей струму від зовнішнього напруги (при відповідно, великих і малих зсувах):



Задача 5. Визначити дифузійну ємність p-n-переходу $p_p = 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $n_n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $D_n = 50 \text{ см}^2 / \text{с}$, $D_p = 100 \text{ см}^2 / \text{с}$, $L_p = 0,1 \text{ см}$, $L_n = 0,01 \text{ см}$, $S = 10^{-4} \text{ см}^2$, $j_s = 100 \text{ A} / \text{см}^2$.

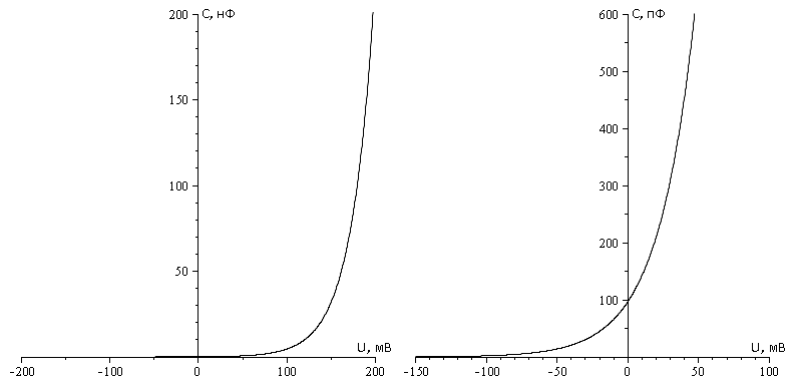
Розв'язок: Дифузійна ємність p-n-переходу визначається як:

$$C_d = \frac{q^2 S}{k_B T} \cdot (p_n L_p + n_p L_n) \cdot \exp\left(\frac{qU}{k_B T}\right) = \frac{q^2 S}{k_B T} \cdot \left(\frac{p_p L_p + n_n L_n}{p_p n_n} \right) \cdot \exp\left(\frac{qU}{k_B T}\right).$$

Підставляючи вихідні дані, отримаємо:

$$C_d = \frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10^{-4}}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \cdot \left(\frac{10^{17} \cdot 0,1 + 10^{14} \cdot 0,01}{10^{17} \cdot 10^{14}} \right) \cdot e^{\frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot U}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} = 96,8 \cdot 10^{-12} \cdot e^{38,682 \cdot U}.$$

Графіки шуканої залежності дифузійної ємності від зовнішньої напруги (при відповідно, великих і малих зсувах):



Задача 6. Визначити граничну частоту випрямлення *p-n*-переходу припускаючи, що *p-n*-перехід ідеальний ($R_d^* = 0$, $R_r^* = \infty$), ємність переходу $C = 1$ нФ, опір втрат $R_s = 1$ Ом.

Розв'язок: Визначимо граничну частоту випрямлення:

$$f = \frac{1}{2\pi C R_s} = \frac{1}{2\pi \cdot 1 \cdot 10^{-12} \cdot 0,1} = 1,592 \cdot 10^{12} \text{ Гц} \approx 1,6 \cdot 10^{12} \text{ ГГц}.$$

Задача 7. Визначити коефіцієнт ударної іонізації $\alpha(E)$ електронів в *Ge* в дрейфовому наближенні ($b = 1,72 \cdot 10^6$ В/см, $A = 1 \cdot 10^6$ см⁻¹) і в *Ge*, *Si*, *GaAs* в дифузійному наближенні.

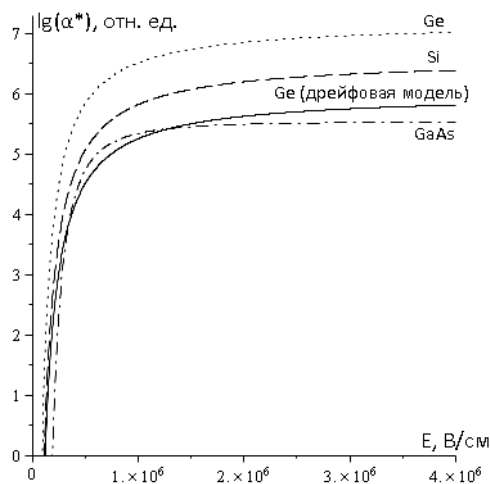
Для *Ge* $A = 1,55 \cdot 10^7$ см⁻¹, $b = 1,56 \cdot 10^6$ В/см, $n = 1$. Для *Si* $A = 3,8 \cdot 10^6$ см⁻¹, $b = 1,75 \cdot 10^6$ В/см, $n = 1$. Для *GaAs* $A = 3,5 \cdot 10^5$ см⁻¹, $b = 6,85 \cdot 10^5$ В/см, $n = 2$.

Розв'язок: Відповідно до умов завдання шукані залежності визначаються так:

$$\alpha_{Ge(\text{дрейфова модель})} = 1 \cdot 10^6 \cdot \exp\left(-\frac{1,72 \cdot 10^6}{E}\right), \quad \alpha_{Ge} = 1,55 \cdot 10^7 \cdot \exp\left(-\frac{1,56 \cdot 10^6}{E}\right),$$

$$\alpha_{Si} = 3,8 \cdot 10^6 \cdot \exp\left(-\frac{1,75 \cdot 10^6}{E}\right), \quad \alpha_{GaAs} = 3,5 \cdot 10^5 \cdot \exp\left(-\frac{4,7 \cdot 10^{11}}{E^2}\right).$$

Графіки шуканих залежностей нормованого коефіцієнта ударної іонізації ($\alpha^* = \alpha/\alpha_0$, де $\alpha_0 = 1$ см⁻¹) від зовнішнього електричного поля набуває вигляду:



Задача 8. Визначити пробивні напруги різкого p - n -переходу при $p_p \gg n_n$, товщина переходу

$$L = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon(\varphi_0 - U)}{q} \cdot \frac{n_p + p_n}{n_i^2}}. \text{ Отримати рівняння для визначення } U_{\text{проб}}.$$

Розв'язок: Перш за все, врахуємо, що виконується умова $|U_{\text{проб}}| \gg \varphi_0$

$$L = \lim_{|U_{\text{проб}}| \gg \varphi_0} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon(\varphi_0 - U)}{q} \cdot \frac{n_p + p_n}{n_i^2}} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon(\varphi_0 - (-U_{\text{проб}}))}{q} \cdot \frac{n_p + p_n}{n_i^2}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_{\text{проб}}}{q} \cdot \frac{n_p + p_n}{n_i^2}}.$$

Враховавши умову $p_p \gg n_n$, отримаємо

$$L = \lim_{p_p \gg n_n} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_{\text{проб}}}{q} \cdot \frac{n_p + p_n}{n_i^2}} = \lim_{p_p \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_{\text{проб}}}{q} \cdot \left(\frac{1}{p_p} + \frac{1}{n_n}\right)} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon U_{\text{проб}}}{qn_n}}.$$

З останнього випливає, що напруга пробою можна визначити, знаючи критичну товщину p - n -переходу, тобто:

$$U_{\text{проб}} = L_{\text{кр}}^2 \frac{qn_n}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Критична товщина p - n -переходу, в свою чергу, залежить від коефіцієнта ударної іонізації в p - n -переході:

$$\alpha(E) = Ae^{-\frac{b}{E}},$$

де A і b – коефіцієнти, що характеризують матеріал напівпровідника, E – напруженість електричного поля в p - n -переході.

Враховавши, що напруженість є функцією координати і величини зовнішнього напруги, перепишемо вираз коефіцієнта ударної іонізації у вигляді:

$$\alpha(x) = Ae^{-\frac{b}{U/(x/2)}} = Ae^{-\frac{bx}{2U}}.$$

Вважаємо, що відбувається не менше двох актів іонізації від одного носія заряду при проходженні через p - n -перехід. Напруженість електричного поля слід розглядати на ділянці половинної товщини p - n -переходу, тобто $x/2$. Враховавши, що величина напруги пробою жорстко пов'язано з критичною товщиною пробою, отримаємо:

$$\alpha(x) = Ae^{-\frac{bx}{2U}} = Ae^{-\frac{bx}{2x^2 \frac{qn_n}{2\varepsilon_0\varepsilon}}} = Ae^{-\frac{b}{2x \frac{qn_n}{2\varepsilon_0\varepsilon}} \cdot \frac{L_{\text{кр}}^2}{L_{\text{кр}}^2}} = Ae^{-\frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}x}}.$$

Критичну товщину p - n -переходу, а отже, і напругу пробою, знайдемо за умови:

$$\int_0^{L_{\text{кр}}} \alpha(x) dx = \int_0^{L_{\text{кр}}} Ae^{-\frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}x}} dx = 1.$$

Ввівши нову змінну $y = -\frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}x}$, отримаємо:

$$\int_0^{L_{\text{кр}}} \alpha(x) dx = \int_0^{L_{\text{кр}}} Ae^{-\frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}x}} dx = \int_{-\infty}^{-\frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}L_{\text{кр}}}} Ae^y x'_y dy = \int_{-\infty}^{-\frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}L_{\text{кр}}}} Ae^y x'_y dy,$$

де x'_y – похідна за новою змінною y від функції сполучною стару змінну x з новою змінною y :

$$x'_y = \left(-\frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}y} \right)'_y = -\frac{(-1) \cdot bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}y^2} = \frac{bL_{\text{кр}}^2}{2U_{\text{проб}}y^2}.$$

Отже, шуканий інтеграл запишеться у вигляді:

$$\int_0^{L_{кр}} \alpha(x) dx = \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \int_{-\infty}^{\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} \frac{e^y}{y^2} dy,$$

і, інтегруючи по частинах, прийдемо до співвідношення:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_{кр}} \alpha(x) dx &= \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \left(e^y \cdot \frac{-1}{y} \right) \Big|_{-\infty}^{\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} - \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \int_{-\infty}^{\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} \left(\frac{-1}{y} \right) d(e^y) = \\ &= \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \cdot \frac{2U_{проб}}{bL_{кр}} e^{-\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} + \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \int_{-\infty}^{\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} \frac{e^y}{y} dy = AL_{кр} e^{-\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} + \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \int_{-\infty}^{\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} \frac{e^y}{y} dy. \end{aligned}$$

Другий доданок отриманого виразу не інтегрується в елементарних функціях і має вигляд спеціальної функції:

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt.$$

Отже, шуканий інтеграл запишеться як:

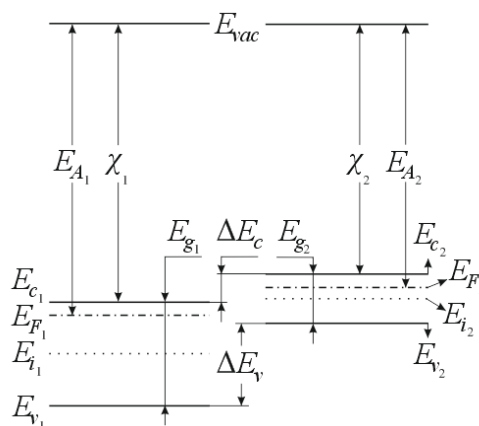
$$\int_0^{L_{кр}} \alpha(x) dx = AL_{кр} e^{-\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} + \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \cdot \text{Ei}(y) \Big|_{-\infty}^{\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} = AL_{кр} e^{-\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} + \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \cdot \text{Ei}\left(-\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}\right).$$

Підставляючи значення знайденого інтеграла в критерій пробою p - n -переходу, отримаємо шукане трансцендентне рівняння для визначення величини напруги пробою p - n -переходу або, що те ж саме, для визначення критичної товщини p - n -переходу

$$AL_{кр} e^{-\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}} + \frac{AbL_{кр}^2}{2U_{проб}} \cdot \text{Ei}\left(-\frac{bL_{кр}}{2U_{проб}}\right) = 1.$$

Задача 9. Побудувати енергетичну діаграму n - n -гетеропереходу $E_{g1} = 1,5$ эВ, $E_{g2} = 0,72$ эВ, $E_{A1} = 4,2$ эВ, $E_{A2} = 3,8$ эВ, $\chi_1 = 4,0$ эВ, $\chi_2 = 3,6$ эВ, $n_1 > n_2$. Визначити висоту бар'єру в кожній з областей переходу і його провідність.

Розв'язок: Побудуємо енергетичні діаграми вихідних напівпровідників у відповідному масштабі (величини енергетичних рівнів позначені індексами 1 і 2):



де E_c – рівень дна зона провідності, E_v – рівень стелі валентної зони, E_F – рівень Фермі, E_i – рівень середини забороненої зони, E_g – ширина забороненої зони, E_{vac} – рівень вакууму, E_A – робота виходу, χ – спорідненість до електрону, ΔE_c – енергетичний бар'єр в зоні провідності, ΔE_v – енергетичний бар'єр в валентній зоні. Останні дві величини дуже легко визначити:

$$\Delta E_c = \chi_1 - \chi_2 = 4,0 - 3,6 = 0,4 \text{ эВ},$$

$$\Delta E_v = E_{g1} + \Delta E_c - E_{g2} = \Delta E_g - \Delta E_c = 1,5 - 0,72 + 0,4 = 1,18 \text{ эВ}.$$

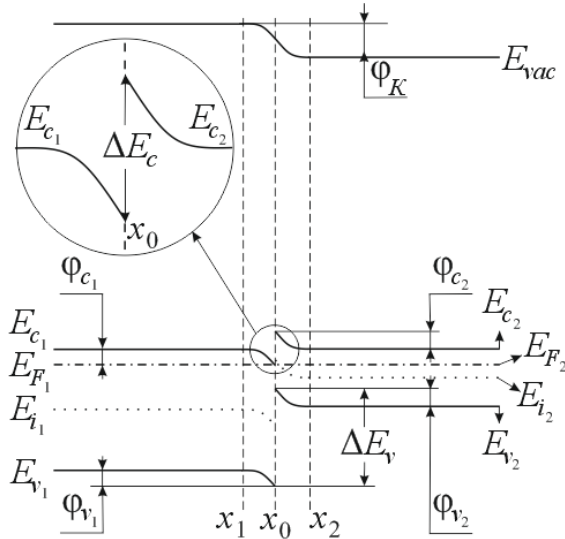
У першому наближенні, знайдені величини, тобто ΔE_c і ΔE_v можуть розглядатися як висоти потенційних бар'єрів для дірок і електронів відповідно.

Для побудови енергетичної діаграми заданого гетеропереходу, побудуємо попередньо енергетичну діаграму ідеально симетричного гетеропереходу, тобто припустимо, що концентрація носіїв заряду контактуючих напівпровідників рівні між собою ($n_1 = n_2$), як рівні і їх діелектричні проникності ($\epsilon_1 = \epsilon_2$).

Для побудови енергетичної діаграми розглянутого гетеропереходу в стані рівноваги необхідно задати систему відліку, це може бути металургійний кордон розділу напівпровідників (x_0) і положенням рівня Фермі ($E_{F1} = E_{F2} = E_F$). З'єднаємо рівні вакууму для напівпровідників (E_{vac}) та визначимо, по-перше, характер спотворень енергетичних рівнів дна зони провідності (E_{c1} і E_{c2}), стелі валентної зони (E_{v1} і E_{v2}), середини забороненої зони (E_{i1} і E_{i2}), по-друге, висоту потенційного бар'єру (контактну різницю потенціалів):

$$\phi_K = E_{A1} - E_{A2} = 4,2 - 3,8 = 0,4 \text{ эВ}.$$

Побудована енергетична діаграма приведена на наступному рисунку:



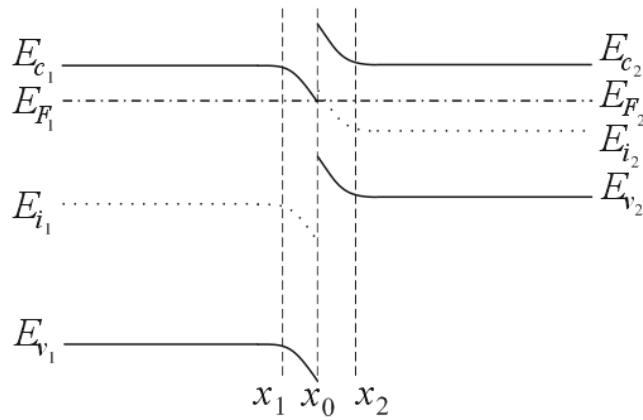
Енергетична діаграма має низку особливостей, що проявляються в області гетеропереходу, тобто між його лівою x_1 та правою x_2 границями. Ці особливості такі: в зоні провідності з'являються потенційна яма ϕ_{c1} і потенційний бар'єр ϕ_{c2} , а у валентній зоні - потенційний бар'єр ϕ_{v1} і потенційна яма ϕ_{v2} , причому для них виконуються співвідношення:

$$\phi_{c1} + \phi_{c2} = \phi_{v1} + \phi_{v2} = \phi_{c1} + \phi_{v2} = \phi_{v1} + \phi_{c2} = \phi_K.$$

З цих співвідношень відразу випливає, що

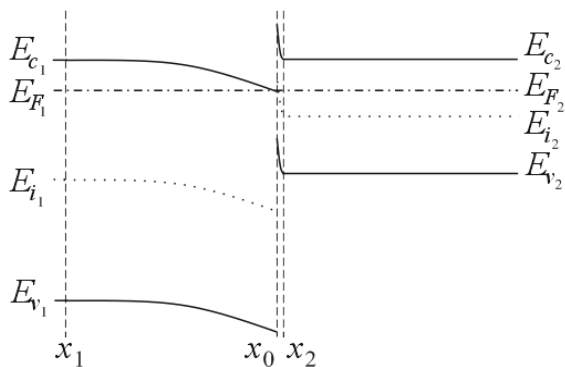
$$\phi_{c1} = \phi_{v1} \text{ и } \phi_{c2} = \phi_{v2}.$$

Оскільки рівень вакууму є базовим елементом для побудови енергетичної діаграми гетеропереходу, але не є таким же для опису електричних властивостей гетеропереходу, то, виключаючи його з підсумкового побудови, отримаємо спрощену енергетичну діаграму n - n -гетеропереходу в стані рівноваги.

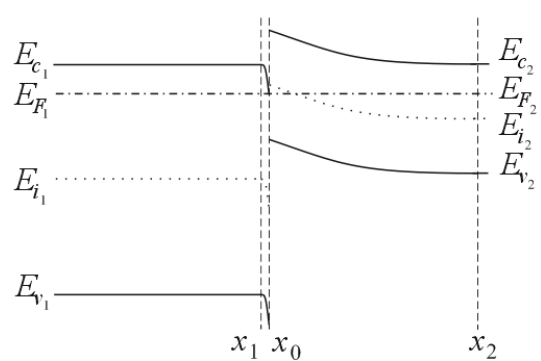


Характер провідності даного симетричного $n-n$ -гетеропереходу визначається, перш за все, не висотою потенційного бар'єра в зоні провідності, а його шириною. Вважаючи $x_1 - x_0 = x_0 - x_2 \leq 150 \text{ \AA}$, отримуємо не випрямляючий контакт (антизапірний характер провідності) і, вважаючи $x_1 - x_0 = x_0 - x_2 > 200 \text{ \AA}$ – випрямляючий контакт (запірний характер провідності).

Для побудови шуканих енергетичних діаграм $n-n$ -гетеропереходу, скористаємося енергетичною діаграмою симетричного $n-n$ -гетеропереходу і правилом зміщення рівноваги. У разі нерівності концентрацій електронів в контактують напівпровідниках ($n_1 \neq n_2$), область гетеропереходу розшириться в напівпровіднику з меншою концентрацією електронів і звужиться в напівпровіднику з більшою концентрацією електронів. Отже, при розширенні гетеропереходу в напрямку напівпровідника з потенційною ямою в зоні провідності ($n_1 < n_2$), отримаємо звуження потенційного бар'єру, що, безсумнівно, призведе до явища тунелювання через бар'єр, тобто це випадок не випрямляючого контакту (антизапірний характер провідності). Навпаки, при розширенні гетеропереходу в напрямку напівпровідника з потенційним бар'єром у зоні провідності ($n_1 > n_2$), отримаємо зростання ширини потенційного бар'єру, що, безсумнівно, призведе до неможливості тунелювання крізь бар'єр, тобто це випадок випрямляючого контакту (запірний характер провідності). Врахувавши останнє, побудуємо шукані енергетичні діаграми $n-n$ -гетеропереходів:



Випадок $n_1 < n_2$ – не випрямляючий контакт.



Випадок $n_1 > n_2$ – випрямляючий контакт.

Розділ 5 Біполярні прилади

Задача 1. Побудувати вольт-амперну характеристику біполярного $p-n-p$ -тріода за умови, що рекомбінацією в базі можна знехтувати ($\chi \rightarrow 0$), коефіцієнт інжекції $\gamma = 1$, ширина бази $W_B = 10$ мкм, концентрація неосновних носіїв в базі $p_n = 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $D_p = 100 \text{ см}^2 / \text{с}$. На яку величину відрізняється струм емітера від струму колектору?

Розв'язок: З рівності коефіцієнта інжекції одиниці, отримаємо:

$$\gamma = \frac{I_{pE}}{I_{pE} + I_{nE}} = 1.$$

Останнє вірно лише тоді, коли електронна компонента струму емітера дорівнює нулю ($I_{nE} = 0$). З іншого боку, з умови малої швидкості рекомбінації в базі, якою можна знехтувати, відразу впливає, що коефіцієнт переносу близький до одиниці:

$$\chi = \frac{I_{pC}}{I_{pE}} \approx 1.$$

Останнє перепишемо у вигляді:

$$I_{pC} = \lim_{\chi \rightarrow 1} (\chi I_{pE}) = I_{pE},$$

отже, діркові компоненти струмів емітера і колектора рівні. Коефіцієнт переносу, з іншого, боку, пов'язує між собою ширину бази і дифузійну довжину дірок в базі:

$$\chi = \operatorname{sech} \left(\frac{W_B}{L_p} \right),$$

звідки отримаємо значення для визначення дифузійної довжини дірок в базі:

$$L_p = \frac{W_B}{\operatorname{arcsech}(\chi)} = \frac{W_B}{\operatorname{arccosh}(1/\chi)}.$$

Визначимо величину дифузійної довжини в базі:

$$L_p = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{10 \cdot 10^{-6}}{\operatorname{arcsech}(\chi)} = \lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{10 \cdot 10^{-6}}{\operatorname{arccosh}(1/\chi)} = +\infty.$$

Отримане значення не варто сприймати буквально, оскільки це всього лише математична запис основного вимоги для практичної реалізації транзистора, а саме, товщина бази повинна бути значно меншою дифузійної довжини неосновних носіїв заряду в базі – L_p ? W_B або $W_B/L_p \ll 1$, що тотожне твердженню $L_p = +\infty$.

Статичний коефіцієнт передачі струму біполярного $p-n-p$ -транзистора, включеного за схемою із загальною базою, визначиться як:

$$\alpha = \lim_{\chi \rightarrow 1} (\gamma \chi) = \lim_{\chi \rightarrow 1} (1 \cdot \chi) = 1.$$

Зі співвідношення зв'язку величини повного струму емітера з повним струмом колектору визначимо величину відмінності струму емітера від струму колектору:

$$\Delta I_{EC} = |I_E - I_C| = |I_E - (\alpha I_E + I_{CB0})| = |I_E (1 - \alpha) - I_{CB0}|,$$

де $I_{CB0} = qS_C \frac{D_p}{L_p \sinh(W_B/L_p)} p_n$ – зворотний теплової струм колекторного переходу при холостому ході в колі емітера, який згідно з умовами завдання дорівнює:

$$I_{CB0} = \lim_{S_C \rightarrow S} \left(\lim_{L_p \rightarrow +\infty} \left(qS_C \frac{D_p}{L_p \sinh(W_B/L_p)} p_n \right) \right) = qS \frac{D_p}{W_B} p_n.$$

Обчислимо шукану різницю між повним струмом емітера і колектора:

$$\Delta I_{EC} = |I_E - I_C| = \left| \lim_{\alpha \rightarrow 1} (I_E (1 - \alpha) - I_{CB0}) \right| = |-I_{CB0}| = |I_{CB0}|.$$

Оскільки величина площі переходів не задана, будемо вважати, що площі емітерного і колекторного переходів рівні і розглянемо різницю щільності повного струму емітера і колектора:

$$\Delta j_{EC} = |j_E - j_C| = |j_{CB0}| = q \frac{D_p}{W_B} p_n = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100 \cdot 10^{12}}{10 \cdot 10^{-4}} = 0,016 \text{ A/cm}^2.$$

Оцінімо величину різниці в повних токах, вважаючи надалі, що площі переходів однакові і рівні $S = 10^{-4} \text{ cm}^2$:

$$\Delta I_{EC} = |I_E - I_C| = S |j_{CB0}| = 10^{-4} \cdot 1,6 \cdot 10^{-2} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ A} = 1,6 \text{ мкА}.$$

Для побудови статичних вольт-амперних характеристик введемо додаткове припущення про те, що електронна складова колекторного струму дорівнює нулю, тобто $I_{nC} = 0$. В цьому випадку, статичні вольт-амперні характеристики будуть визначатися тільки дірковими компонентами струмів і в разі включення по схемі із загальною базою, будуть залежностями струмів емітера (I_E) і колектора (I_C) від напруги на емітерному (U_{EB}) та колекторному (U_{CB}) переходах відповідно:

$$\begin{aligned} I_E &= I_{E0} \left(e^{U_{EB}/\phi_T} - 1 \right) - I_{CB0} \left(e^{U_{CB}/\phi_T} - 1 \right), \\ I_C &= I_{E0} \left(e^{U_{EB}/\phi_T} - 1 \right) - I_{C0} \left(e^{U_{CB}/\phi_T} - 1 \right), \end{aligned}$$

де $\phi_T = k_B T / q = \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6021 \cdot 10^{-19}} = 0,025852 \text{ В} = 25,852 \text{ мВ}$ – температурний потенціал, I_{CB0} і I_{E0} – зворотні теплові струми колекторного і емітерного переходів при холостому ході в колі емітера і колектора відповідно, I_{C0} і I_{E0} – зворотні теплові струми колекторного і емітерного переходів при короткому замиканні в колі емітера і колектора відповідно. Визначимо значення шуканих струмів:

$$\begin{aligned} I_{CB0} &= \lim_{S_C \rightarrow S} \left(\lim_{L_p \rightarrow +\infty} \left(\frac{q S_C D_p p_n}{L_p \sinh(W_B/L_p)} \right) \right) = q S \frac{D_p}{W_B} p_n = 1,6 \text{ мкА}, \\ I_{E0} &= \lim_{S_E \rightarrow S} \left(\lim_{L_p \rightarrow +\infty} \left(\frac{q S_E D_p p_n}{L_p \sinh(W_B/L_p)} \right) \right) = q S \frac{D_p}{W_B} p_n = 1,6 \text{ мкА}, \\ I_{C0} &= \lim_{S_C \rightarrow S} \left(\lim_{L_p \rightarrow +\infty} \left(q S_C \frac{D_p}{L_p} p_n \coth \left(\frac{W_B}{L_p} \right) \right) \right) = q S \frac{D_p}{W_B} p_n = 1,6 \text{ мкА}, \\ I_{E0} &= \lim_{S_E \rightarrow S} \left(\lim_{L_p \rightarrow +\infty} \left(q S_E \frac{D_p}{L_p} p_n \coth \left(\frac{W_B}{L_p} \right) \right) \right) = q S \frac{D_p}{W_B} p_n = 1,6 \text{ мкА}, \end{aligned}$$

де S_E і S_C – площі емітерного і колекторного переходів відповідно.

Враховуючи, що $1/\phi_T = 38,682 \text{ В}^{-1}$, отримаємо вирази для статичних вольт-амперних характеристик p - n - p -транзистора, включеного за схемою із загальною базою:

$$\begin{aligned} I_E &= 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot \left(e^{38,682 U_{EB}} - 1 \right) - 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot \left(e^{38,682 U_{CB}} - 1 \right), \\ I_C &= 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot \left(e^{38,682 U_{EB}} - 1 \right) - 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot \left(e^{38,682 U_{CB}} - 1 \right). \end{aligned}$$

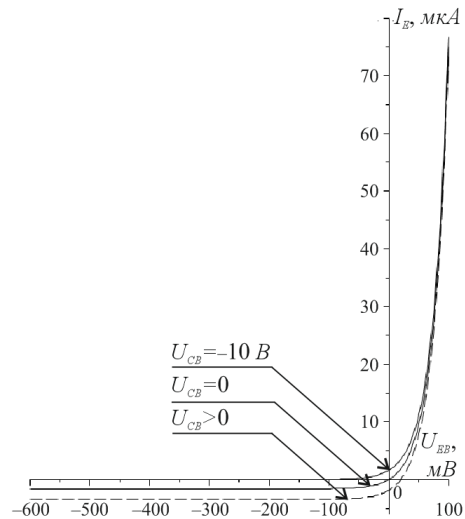
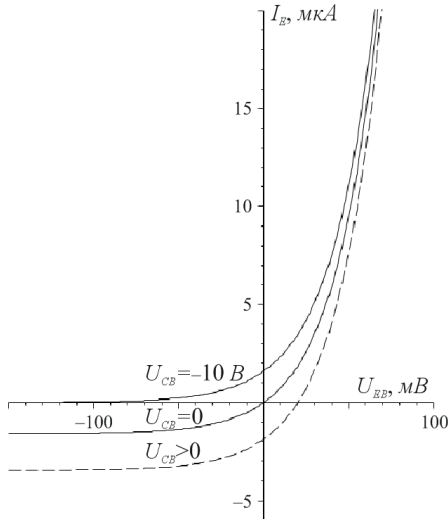
Розкриваючи дужки і проводячи необхідні скорочення, остаточно отримаємо вирази для статичних вольт-амперних характеристик p - n - p -транзистора, включеного за схемою із загальною базою:

$$I_E = 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot \left(e^{38,682 U_{EB}} - e^{38,682 U_{CB}} \right),$$

$$I_C = 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot (e^{38,682 \cdot U_{EB}} - e^{38,682 \cdot U_{CB}}).$$

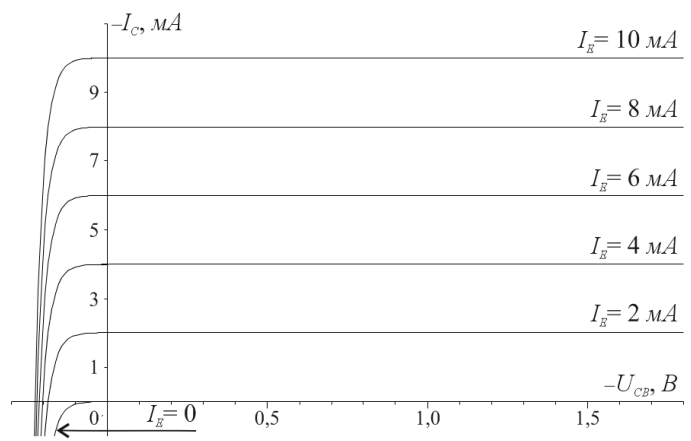
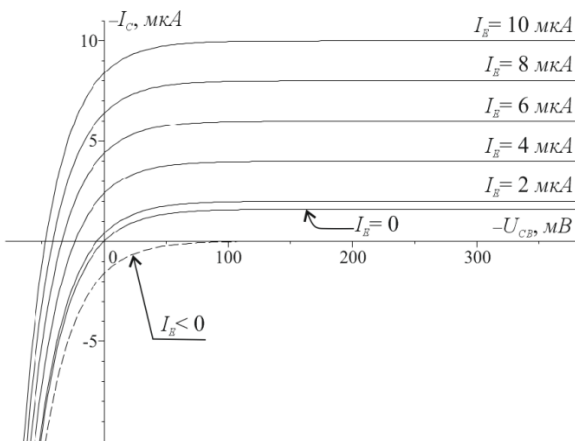
Графіки шуканих статичних вольт-амперних характеристик $p-n-p$ -транзистора, включеного за схемою із загальною базою наведені на рисунку:

Статичні ВАХ $p-n-p$ -транзистора, включеного за схемою із загальною базою



Вхідні ВАХ (область малих зміщень)

Вхідні ВАХ (область великих зміщень)



Вихідні ВАХ (область малих зміщень)

Вихідні ВАХ (область великих зміщень)

Задача 2. Визначити коефіцієнт підсилення по струму $p-n-p$ -транзистора, включеного за схемою з загальним емітером, якщо при зміні струму бази струм колектору змінився на 5,0 мА, а струм емітера на 5,2 мА.

Розв'язок: Відомо, що коефіцієнт підсилення по струму в схемі із загальною базою:

$$h_{21B} = \Delta I_C / \Delta I_E.$$

Тоді визначимо шуканий коефіцієнт підсилення по струму в схемі з загальним емітером:

$$h_{21E} = \frac{h_{21B}}{1 - h_{21B}} = \frac{\Delta I_C / \Delta I_E}{1 - \Delta I_C / \Delta I_E} = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_E - \Delta I_C} = \frac{5,0}{5,2 - 5,0} = 25.$$

Задача 3. Визначити час прольоту носіями бази дифузійного тріода, якщо коефіцієнт дифузії дірок $D_p = 50 \text{ см}^2 / \text{с}$, а товщина бази $W_B = 10 \text{ мкм}$.

Розв'язок: Час прольоту носіями бази дифузійного тріода знайдемо за формулою:

$$t_{dif} = \frac{W_B^2}{2D_p} = \frac{(10 \cdot 10^{-4})^2}{2 \cdot 50} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ с} = 10 \text{ нс}.$$

Задача 4. Визначити час прольоту носіїв і напруженість електричного поля в базі дрейфового р-п-р-тріода при довжині бази $W_B = 10 \text{ мкм}$, $D_p = 50 \text{ см}^2 / \text{с}$ і довжині дифузії домішки $L_0 = 10^{-5} \text{ см}$.

Розв'язок: Функція розподілу домішок в базі описується як:

$$N = N_0 e^{-\frac{x}{L_0}}.$$

Напруженість електричного поля знайдеться за формулою:

$$E = -\frac{k_B T}{q} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dx} = -\frac{k_B T}{q} \cdot \frac{1}{N_0 e^{-\frac{x}{L_0}}} \cdot \left(-\frac{N_0}{L_0} e^{-\frac{x}{L_0}} \right) = \frac{k_B T}{q L_0},$$

і, відповідно, швидкість носіїв в цьому полі визначиться як:

$$v = \mu E = \frac{\mu k_B T}{q L_0} = \frac{D}{L_0},$$

де D – коефіцієнт дифузії носіїв заряду, рухливість яких дорівнює μ .

Знаючи швидкість носіїв заряду, легко визначити і час прольоту через базу:

$$t_{dr} = \int_0^{W_B} \frac{dx}{v} = \int_0^{W_B} \frac{dx}{D/L_0} = \frac{L_0}{D} x \Big|_0^{W_B} = \frac{W_B L_0}{D}.$$

Визначимо шукані величини відповідно до умови задачі:

$$E = \frac{k_B T}{q L_0} = \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6021 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-5}} = 2585,2 \text{ В / см},$$

$$t_{dr} = \frac{10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-5}}{50} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ с} = 0,2 \text{ нс}.$$

Задача 5. Визначити коефіцієнт переносу для біполярного ррр-тріода з товщиною бази W_B і дифузійної довжиною неосновних носіїв (дірок) L_p .

Розв'язок: Будемо вважати, р-п-р-транзистор ідеальний, іншими словами, знехтуємо електронними складовими повних струмів емітера і колектора. З урахуванням ідеальності, статичні вольт-амперні характеристики біполярного р-п-р-тріода, включеного за схемою із загальною базою, є залежностями струмів емітера (I_E) і колектору (I_C) від напруги на емітерному (U_{EB}) та колекторному (U_{CB}) переходах відповідно:

$$I_E = I_{E0} (e^{U_{EB}/\phi_T} - 1) - I_{CB0} (e^{U_{CB}/\phi_T} - 1),$$

$$I_C = I_{EB0} (e^{U_{EB}/\phi_T} - 1) - I_{C0} (e^{U_{CB}/\phi_T} - 1),$$

де $\phi_T = k_B T / q = \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6021 \cdot 10^{-19}} = 0,025852 \text{ В} = 25,852 \text{ мВ}$ – температурний потенціал, I_{CB0} і I_{EB0} – зворотні теплові струми колекторного і емітерного переходів при холостому ході в ланцюзі емітера і колектора відповідно, I_{C0} і I_{E0} – зворотні теплові струми колекторного і емітерного переходів при короткому замиканні в колії емітера і колектора відповідно. Визначимо значення зазначених струмів, вважаючи, що площі емітерного (S_E) і колекторного (S_C) переходів рівні:

$$I_{CB0} = \lim_{S_C \rightarrow S} \left(\frac{qS_C D_p p_n}{L_p \sinh(W_B/L_p)} \right) = \frac{qSD_p p_n}{L_p \sinh(W_B/L_p)},$$

$$I_{EB0} = \lim_{S_E \rightarrow S} \left(\frac{qS_E D_p p_n}{L_p \sinh(W_B/L_p)} \right) = \frac{qS_E D_p p_n}{L_p \sinh(W_B/L_p)},$$

$$I_{C0} = \lim_{S_C \rightarrow S} \left(qS_C \frac{D_p}{L_p} p_n \coth\left(\frac{W_B}{L_p}\right) \right) = qS \frac{D_p}{L_p} p_n \coth\left(\frac{W_B}{L_p}\right),$$

$$I_{E0} = \lim_{S_E \rightarrow S} \left(qS_E \frac{D_p}{L_p} p_n \coth\left(\frac{W_B}{L_p}\right) \right) = qS \frac{D_p}{L_p} p_n \coth\left(\frac{W_B}{L_p}\right).$$

Коефіцієнт перенесення можна визначити як відношення приросту діркового струму колектору $dI_{pC} = (dI_{pC} / dU_{EB}) \cdot dU_{EB}$ до приросту діркового струму емітера $dI_{pE} = (dI_{pE} / dU_{EB}) \cdot dU_{EB}$:

$$\chi = \frac{dI_{pC}}{dI_{pE}} = \frac{(dI_{pC} / dU_{EB}) \cdot U_{EB}}{(dI_{pE} / dU_{EB}) \cdot U_{EB}} = \frac{dI_{pC} / dU_{EB}}{dI_{pE} / dU_{EB}}.$$

Визначаючи необхідні похідні, одержимо

$$\frac{dI_{pC}}{dU_{EB}} = \frac{qSD_p p_n e^{U_{EB}/\Phi_T}}{\Phi_T L_p \sinh(W_B/L_p)},$$

$$\frac{dI_{pE}}{dU_{EB}} = \frac{qSD_p p_n \coth(W_B/L_p) e^{U_{EB}/\Phi_T}}{\Phi_T L_p}.$$

Повертаючись до виразу коефіцієнта переносу, отримаємо:

$$\chi = \frac{dI_{pC}}{dI_{pE}} = \frac{\frac{qSD_p p_n e^{U_{EB}/\Phi_T}}{\Phi_T L_p \sinh(W_B/L_p)}}{\frac{qSD_p p_n \coth(W_B/L_p) e^{U_{EB}/\Phi_T}}{\Phi_T L_p}} = \frac{\tanh(W_B/L_p)}{\sinh(W_B/L_p)} = \frac{1}{\cosh(W_B/L_p)} = \operatorname{sech}(W_B/L_p).$$

З огляду на складності функції секанса гіперболічного, зробимо розкладання останнього в ряд Тейлора в околі точки $W_B/L_p = 0$:

$$\chi = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{W_B^2}{L_p^2} + \frac{5}{24} \cdot \frac{W_B^4}{L_p^4} - \frac{61}{720} \cdot \frac{W_B^6}{L_p^6} + \frac{277}{8064} \cdot \frac{W_B^8}{L_p^8} - \frac{50521}{362880} \cdot \frac{W_B^{10}}{L_p^{10}} + O\left(\frac{W_B^{12}}{L_p^{12}}\right).$$

Останній вираз спрощується, якщо взяти до уваги те, що $W_B \ll L_p$, тобто обмежувачись другим членом розкладання, отримаємо остаточно:

$$\chi = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{W_B^2}{L_p^2}.$$

Задача 6. побудувати залежність $\alpha(\omega)$ для біполярного тріода для $r_E = 100 \text{ Ом}$, $C_{Ed} = 100 \text{ нФ}$ при $U_E = \text{const}$, $W_B = 10 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, $D_p = 50 \text{ см}^2/\text{с}$. Визначити максимальну частоту посилення по току тріода в схемі із загальною базою за рівнем коефіцієнта посилення по току 0,707.

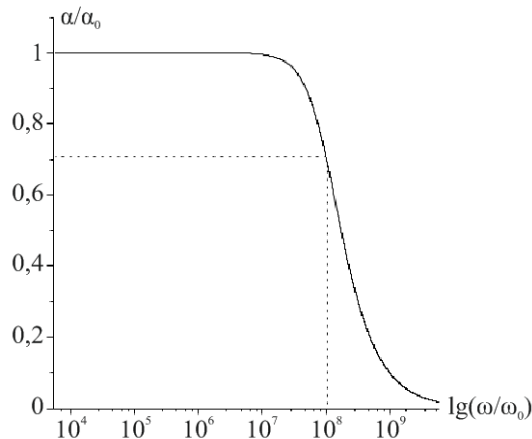
Розв'язок: Частотна залежність коефіцієнта передачі струму емітера транзистора, включеного за схемою із загальною базою, визначається за формулою:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_\alpha)^2}},$$

де $\omega_\alpha = 2D_p/W_B^2 = 2 \cdot 50 / (10 \cdot 10^{-4})^2 = 10^8 \text{ рад/с}$ – гранична частота, тобто та частота, на якій коефіцієнт передачі струму емітера транзистора, включеного за схемою із загальною базою, зменшується в $\sqrt{2}$ рази. Цю ж частоту можна визначити і з еквівалентної схеми транзистора:

$$\omega_\alpha = (r_E C_{Ed})^{-1} = (100 \cdot 100 \cdot 10^{-12})^{-1} = 10^8 \text{ рад/с}.$$

Позначаючи через α_0 – номінальний коефіцієнт передачі струму транзистора, включеного за схемою із загальною базою, і через $\omega_0 = 1 \text{ рад/с}$ – нормовану частоту, побудуємо шукану залежність $\alpha(\omega)$ в координатах $(\lg(\omega/\omega_0), \alpha/\alpha_0)$, яка представлена на рисунку:



Задача 7. Визначити напругу включення тиристора $U_{вкл}$ і зворотну пробивну напругу $U_{зб}$ для p-n-p-n-тиристора при напрузі пробою центрального або бічного переходу $U_n = 100 \text{ В}$. Коефіцієнти підсилення тріодів, які складають тиристор $\alpha_1 = 0,2$, $\alpha_2 = 0,3$, коефіцієнт множення $n = 4$.

Розв'язок: Визначимо напругу включення тиристора:

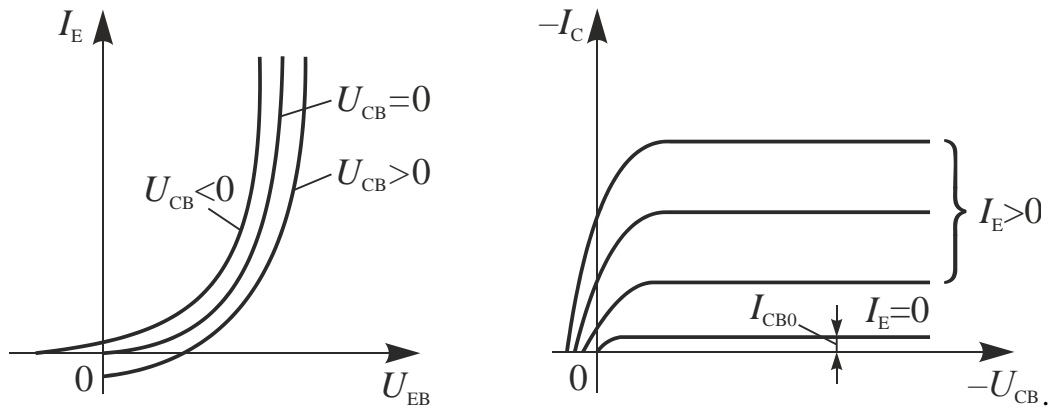
$$U_{вкл} = U_n (1 - \alpha_1 - \alpha_2)^{1/n} = 100 \cdot (1 - 0,2 - 0,3)^{1/4} = 84,1 \text{ В}.$$

Максимальна зворотна пробивна напруга визначається пробоем умовного транзистора з великим коефіцієнтом передачі струму емітера в схемі із загальною базою. Згідно з вихідними даними, це транзистор з $\alpha_2 = 0,3$, отже, зворотне пробивна напруга знайдеться як:

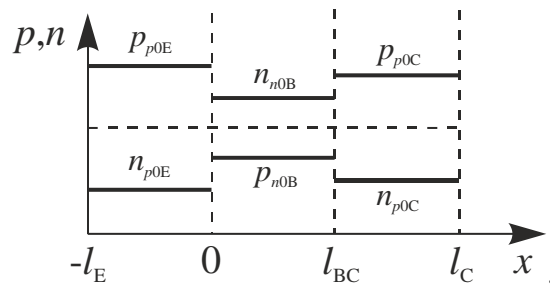
$$U_{зб} = U_n (1 - \alpha_2)^{1/n} = 100 \cdot (1 - 0,3)^{1/4} = 91,47 \text{ В}.$$

Задача 8. Побудувати вольт-амперні характеристики p-n-p-тріода - вхідні для схеми із загальною базою, вихідні для схеми із загальною базою. Розглянути розподіл носіїв у базі тріода при різних режимах. Розглянути режим насичення в тріоді.

Розв'язок: Статичні вольт-амперні характеристики p-n-p-транзистора, включеного за схемою із загальною базою, наведені на рисунку, де залежність $I_E = f(U_{EB})|_{U_{CB}=\text{const}}$ – вхідні характеристики, а $I_C = f(U_{CB})|_{I_E=\text{const}}$ – вихідні.

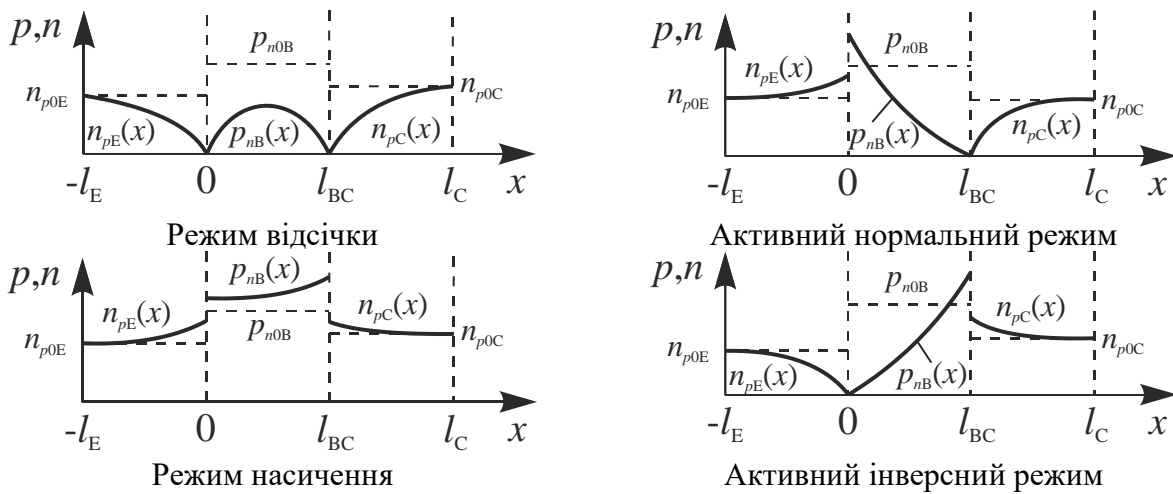


Якщо в плоскій моделі $p-n-p$ -транзистора вибрати систему координат так, щоб емітер розташовувався від $-l_E$ до 0 , база від 0 до l_{BC} , колектор від l_{BC} до l_C , то розподіл концентрацій носіїв заряду у рівноважному стані можна зобразити у наступному вигляді:



де p і n – відповідно, концентрації електронів і дірок, що залежать від координати x , індекси “ p ” та “ n ” вказують на тип напівпровідника, в якому розподілені носії заряду, індекси “ E ”, “ B ” та “ C ” вказують в якій області транзистора розподілені носії заряду, індекс “ 0 ” є ознакою рівноважного розподілу. Наведемо приклад розшифровки позначення p_{n0B} : рівноважна концентрація неосновних носіїв заряду в базі або рівноважна концентрація дірок в базі n -типу.

Включення транзистора в електричне коло призводить до створення рівноважного розподілу носіїв заряду. Розподілу неосновних носіїв заряду в емітер, базі і колекторі позначимо через $n_{pE}(x)$, $p_{nB}(x)$ та $n_{pC}(x)$, відповідно. Вид розподілів концентрацій неосновних носіїв заряду в транзисторі в залежності від режиму його роботи наведено нижче.



У режимі насичення обидва $p-n$ -переходи транзистора зміщені в прямому напрямку, в результаті чого в базу інжектуються неосновні носії заряду, концентрація яких значно перевищує рівноважну. Останнє викликає наповнення бази електронами, які прийшли з зовнішнього кола.

Вид розподілу дірок в базі залежить від величин зміщення p - n -переходів транзистора. В даному режимі роботи транзистора неможливо управління струмом колектору за допомогою зміни струму емітера.

Задача 9. Розглянути роботу тріода в імпульсному режимі. Тріод p - n - p включений з загальним емітером, на базу подається імпульс струму з амплітудою $I_{\text{вх}} = 10 \text{ мкА}$, тривалість імпульсу $t_{\text{вх}} = 10 \text{ мкс}$, час життя носіїв в базі тріода $\tau_p = 50 \text{ мкс}$, в колі база-емітер включено опір $R_B = 1 \text{ кОм}$ і джерело напруги $U_0 = 2 \text{ В}$. Намалювати епюри вхідного імпульсного струму; струмів, які протікають у вхідному колі під час дії імпульсу і після його припинення; струму, який протікає в колекторному колі під час дії вхідного імпульсу струму і після його припинення. Час, протягом якого тріод знаходиться в активній області $t_{\text{акт}} = 1 \text{ мкс}$. Визначити час розсмоктування накопиченого заряду в базі тріода $t_{\text{рас}}$.

Розв'язок: Час розсмоктування носіїв заряду з області бази для p - n - p -транзистора, включеного за схемою з загальним емітером, визначається:

$$t_{\text{рас}} = \tau_p \ln \frac{I_{\text{рас}} + I_{\text{вх}}(1 - e^{-t_{\text{вх}}/\tau_p})}{I_{\text{рас}} + I_{\text{вх}}(1 - e^{-t_{\text{акт}}/\tau_p})},$$

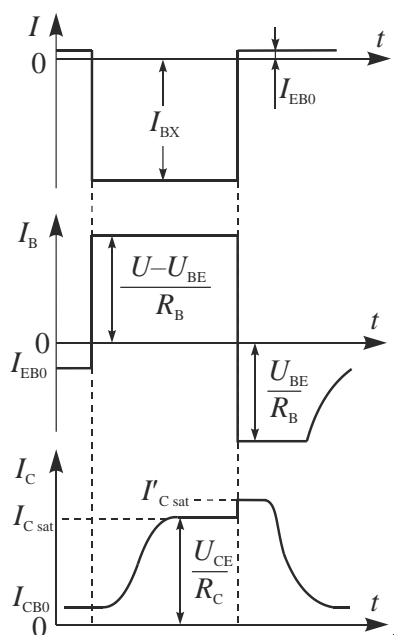
де $I_{\text{вх}}$ – амплітуда вхідного імпульсу струму, $I_{\text{рас}}$ – величина струму розсмоктування неосновних носіїв заряду з бази, $t_{\text{вх}}$ – тривалість вхідного імпульсу струму, $t_{\text{акт}}$ – час, протягом якого транзистор знаходиться в активній області, τ_p – час життя неосновних носіїв заряду в базі. Очевидно, завдання зводиться до знаходження струму розсмоктування. Вважаючи, що обмежувальне опір в базовому колі багато більше за всіх інших опорів в цьому колі і враховуючи, що під час розсмоктування напруга на емітерний перехід дорівнює $U_{BE} = 0,2 \text{ В}$, отримаємо вираз для знаходження струму розсмоктування:

$$I_{\text{рас}} = (U_0 - U_{BE}) / R_B = (2 - 0,2) / 10^3 = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ А} = 1,8 \text{ мА}.$$

Шукане час розсмоктування носіїв заряду з області бази

$$t_{\text{рас}} = 50 \cdot 10^{-6} \cdot \ln \frac{1,8 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-10 \cdot 10^{-6} / 50 \cdot 10^{-6}})}{1,8 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - e^{-1 \cdot 10^{-6} / 50 \cdot 10^{-6}})} = 29,6 \text{ мкс} \approx 30 \text{ мкс}.$$

Епюри струмів, що протікають в p - n - p -транзисторі, включеного за схемою з загальним емітером в імпульсному режимі роботи, наведені на наступному рисунку:



де I_{CB0} і I_{EB0} – зворотні теплові струми колекторного і емітерного переходів при холостому ході в колі емітера і колектора відповідно, $I_{C\ sat}$ – струм колектора в режимі насичення, $I'_{C\ sat}$ – струм колектора в режимі насичення з урахуванням приросту напруги на колекторі за рахунок різкої зміни полярності на емітерний перехід, U_{CE} – напруга колектор-емітер, R_C – опір навантаження в колі колектора.

Розділ 6 Уніполярні прилади

Задача 1. Визначити $I_{D\ sat}$ і $U_{DS\ sat}$ польового триода з рп-переходом при напрузі перекриття

каналу $U_{G0} = \frac{qN_D h_0^2}{8\epsilon_0 \epsilon}$ при $N_D = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $h_0 = 10^{-4} \text{ см}$, $R_0 = 200 \text{ Ом}$.

Розв'язок: Статичні вихідні вольт-амперні характеристики уніполярного транзистора з керуючим р-п-переходом, включеним по схемі із загальним витоком, описуються таким рівнянням:

$$I_D = \frac{U_{DS} + \frac{2}{3}U_{G0}^{-1/2} \left(U_{GS}^{3/2} - (U_{GS} + U_{DS})^{3/2} \right)}{R_0},$$

де, I_D – струм стоку, R_0 – мінімальний опір каналу транзистора або опір каналу транзистора при нульовій напрузі на затворі, U_{DS} – напруга між стоком і витоком або напруга стік-витік, U_{G0} – напруга перекриття каналу при відсутності будь-якого потенціалу на затворі або, просто, напруга перекриття каналу, U_{GS} – напруга між затвором і витоком або напруга затвор-витік.

Для знаходження струму насичення стоку транзистора знайдемо похідну цього струму по напрузі стік-витік:

$$\frac{dI_D}{dU_{DS}} = \frac{1 - U_{G0}^{-1/2} (U_{GS} + U_{DS})^{1/2}}{R_0}.$$

Прирівняємо знайдену похідну до нуля і визначимо залежність шуканого напруги насичення як функцію напруги затвор-витік:

$$U_{DS\ sat} = U_{G0} - U_{GS}.$$

Підставляючи $U_{DS} = U_{DS\ sat}$ в рівняння ВАХ транзистора, визначимо шукану залежність струму стоку насичення як функцію від напруги затвор-витік:

$$I_{D\ sat} \Big|_{f(U_{GS})} = \frac{\frac{1}{3}U_{G0} - U_{GS} + \frac{2}{3}U_{GS}^{3/2}U_{G0}^{-1/2}}{R_0}.$$

Аналогічно, визначимо залежність напруги на затворі, при якому настає насичення, як функцію напруги стік-витік:

$$U_{GS\ sat} = U_{G0} - U_{DS},$$

і, підставивши отриманий вираз $U_{GS} = U_{GS\ sat}$ в рівняння ВАХ транзистора, визначимо шукану залежність струму стоку насичення як функцію від напруги стік-витік:

$$I_{D\ sat} \Big|_{f(U_{DS})} = \frac{U_{DS} - \frac{2}{3}U_{G0} + \frac{2}{3}U_{G0}^{-1/2} (U_{G0} - U_{DS})^{3/2}}{R_0}.$$

Крутизну визначимо за формулою:

$$S = -\frac{dI_{D\ sat}}{dU_{GS}} = \frac{1 - (U_{GS}/U_{G0})^{1/2}}{R_0}.$$

З отриманого виразу отримаємо, що з ростом напруги затвор-витік крутизна буде зменшуватися і максимальне значення крутизни буде визначатися при відсутності напруги на стоці буде:

$$S_{\max} = \left(\frac{1 - (0/U_{G0})^{1/2}}{R_0} \right) = \frac{1}{R_0}.$$

Підставляючи в отримані вирази вихідні числові дані, отримаємо:

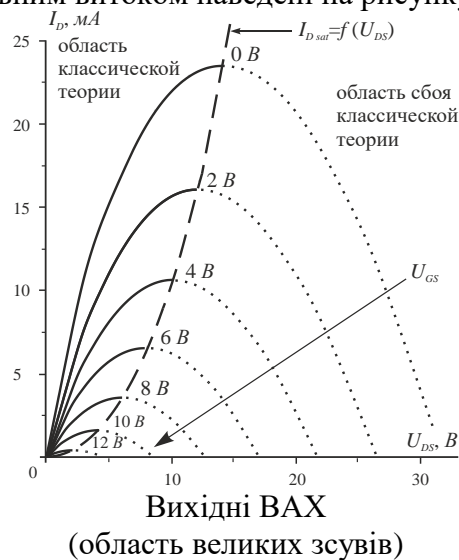
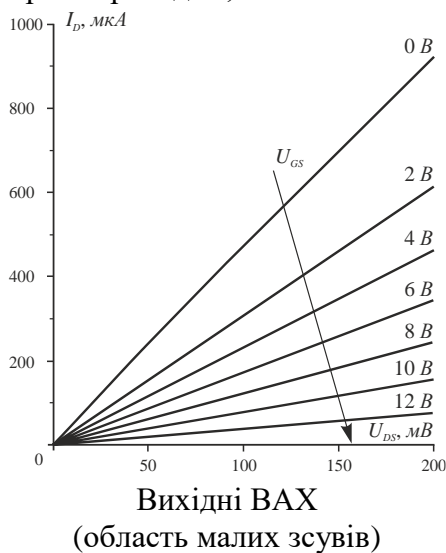
$$U_{G0} = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot (10^{-4})^2}{8 \cdot 8,854 \cdot 10^{-14} \cdot 16} = 14,137 \text{ В} \approx 14,14 \text{ В},$$

$$S_{\max} = R_0^{-1} = 200^{-1} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А/В} = 5 \text{ мА/В},$$

$$I_D = \frac{U_{DS} + \frac{2}{3}(14,14)^{-1/2} (U_{GS}^{3/2} - (U_{GS} + U_{DS})^{3/2})}{200} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot U_{DS} + 8,866 \cdot 10^{-4} \cdot (U_{GS}^{3/2} - (U_{GS} + U_{DS})^{3/2}) \text{ А},$$

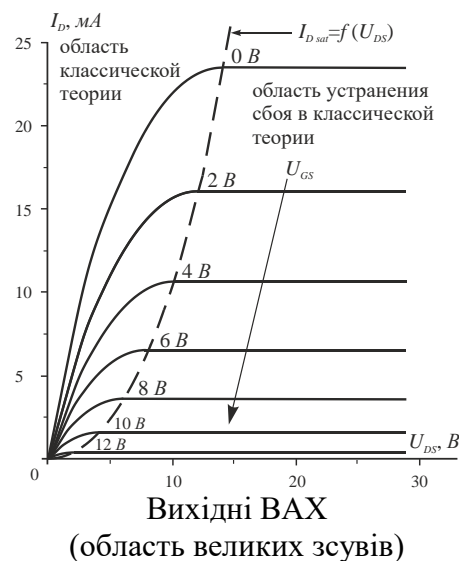
$$I_{D \text{ sat}} \Big|_{f(U_{DS})} = \frac{U_{DS} - \frac{2}{3} \cdot 14,14 + \frac{2}{3} (14,14)^{-1/2} (14,14 - U_{DS})^{3/2}}{200} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot U_{DS} + 8,866 \cdot 10^{-4} \cdot (14,14 - U_{DS})^{3/2} - 4,712 \cdot 10^{-2} \text{ А}.$$

Графіки шуканих статичних вольт-амперних вихідних характеристик уніполярного транзистора з керуючим р-n-переходом, включеного по схемі із загальним витоком наведені на рисунку:



Отже, в області малих зміщень спостерігається лінійна залежність струму стоку від напруги стік-витік і в міру зростання напруги на стоці зростання струму стоку поступово сповільнюється, тобто залежність перестає бути лінійною. Далі, з математичної моделі, струм стоку за умови постійної напруги затвор-витік, досягає максимуму, рівного току насичення, і потім починає спадати, що не відповідає дійсності. Причина цього в тому, що вихідні положення моделі непридатні для струмів стоку великих струмів насичення. Границя математичної застосовності моделі задається залежністю $I_{D \text{ sat}} = f(U_{DS})$, зображеної пунктиром.

Для вірної побудови статичних вихідних вольт-амперних характеристик уніполярного транзистора з керуючим р-n-переходом, включеного по схемі із загальним витоком необхідно будувати теоретичні залежності поки струм стоку не досягне величини насичення, а потім продовжувати їх прямими паралельними осі напруги стік-витік. Відкориговані описаним чином ВАХ представлені на рисунку.



Задача 2. Визначити крутизну МОН-тріода S_0 в режимі збагачення при $n_{ch0} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, товщині каналу $H = 10^{-4} \text{ см}$, довжині каналу $L = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, поперечному розмірі каналу $W = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, товщині ізолятора під затвором $d = 10^{-5} \text{ см}$, $\epsilon_{\text{SiO}_2} = 4$, $\mu_n|_{\text{Si}} = 1450 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, напрузі на затворі $U_{GS} = 1 \text{ В}$.

Теорія: Почнемо розв'язання даної задачі з виведення феноменологічних залежностей між струмом в каналі МДН-транзистора і зовнішніми напругами, тобто з визначення виду феноменологічних статичних вольт-амперних характеристик МДН-транзистора.

Відразу припустимо, що МДН-транзистор - виготовлений на підкладці p -типу, тобто розглядатимемо випадок n -каналу. Вважаючи, що канал має форму паралелепіпеда, вимагатимемо установки правої декартової координатної системи таким чином, щоб вісь абсцис (x) була спрямована уздовж ширини каналу (W), вісь ординат (y) – вздовж довжини каналу (L) і вісь аплікату (z) – уздовж глибини каналу (H). Також припустимо, що МДН-транзистор - ідеальний:

1. Струми в напрямку як від підкладки до витоку і стоку, так і в зворотному напрямку дорівнюють нулю.
2. Підзатворний діелектрик однорідний і ідеальний, тобто опір діелектрика постійному струму дорівнює нескінченності $R_i = \infty$, або, що те ж саме $\tan \delta = 0$ і діелектрична проникність незмінна $\epsilon = \text{const}$.
3. Рухливість носіїв заряду в каналі не залежить від будь-яких факторів і дорівнює за величиною об'ємної рухливості носіїв заряду.
4. Концентрація носіїв заряду в каналі однорідна і не залежить від будь-яких факторів.
5. Електричне поле, що викликає струм в каналі МДН-транзистора, обумовлено тільки напругою між стоком і витоком, тобто слідуємо, так званому, наближенню плавного каналу.
6. У кожній геометричній точці каналу в напрямку нормалі до поперечного перерізу каналу дотримується закон Ома, тобто

$$j_D(x, y, z) = q\mu_{ch}n_{ch}(x, y, z)E_{DS}(x, y, z),$$

де q – заряд електрону, μ_{ch} – рухливість основних носіїв заряду в каналі, $n_{ch}(x, y, z)$ – функція розподілу концентрації носіїв заряду в каналі, $E_{DS}(y)$ – функція розподілу електричного поля в каналі, створюваного напругою на стоці по відношенню до витоку (U_{DS}).

Перш за все, виходячи з останнього положення, знайдемо абсолютну величину струму в каналі, тобто струм стоку (I_D):

$$\begin{aligned} I_D &= S \cdot j_D(x, y, z) = S \cdot \frac{1}{HLW} \int_0^L \int_0^H \int_0^W j_D(x, y, z) dx dz dy = \\ &= \frac{S}{HLW} \int_0^L \int_0^H \int_0^W q\mu_{ch}n_{ch}(x, y, z)E_{DS}(x, y, z) dx dz dy, \end{aligned}$$

де $S = HW$ – площа поперечного перерізу каналу.

В силу того, що електричне поле в однорідному зразку постійно, тобто $E_{DS}(x, y, z) = U_{DS}/L = \text{const}$, вираз для струму стоку істотно спрощується

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{\mu_{ch}S}{HLW} \cdot \frac{U_{DS}}{L} \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch}(x, y, z) dx dz dy = \frac{\mu_{ch}HW}{HLW} \cdot \frac{U_{DS}}{L} \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch}(x, y, z) dx dz dy = \\ &= \frac{\mu_{ch}}{L^2} U_{DS} \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch}(x, y, z) dx dz dy. \end{aligned}$$

З огляду на, що інтеграл по $qn_{ch}(x, y, z)$ дорівнює загальному заряду носіїв в каналі МДН-транзистора, а саме $\int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch}(x, y, z) dx dz dy = Q$, вираз для струму стоку набуде вигляду:

$$I_D = \frac{\mu_{ch}}{L^2} U_{DS} \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch}(x, y, z) dx dz dy = \mu_{ch}QL^2U_{DS}.$$

Таким чином, математично задача зводиться до знаходження функції $n_{ch}(x, y, z)$, яку можна знайти з вимоги електронейтральності будь-якого поперечного перерізу каналу в напрямку осі z , тобто від затвора до підкладки, по відношенню до зовнішнього джерела:

$$Q_{ext} = -Q_{MISFET}.$$

Інакше кажучи, заряд, створюваний зовнішнім джерелом Q_{ext} , в точності дорівнює і протилежний за знаком заряду, який індукують в МДН-транзисторі Q_{MISFET} або сумарний заряд будь-якого поперечного перерізу МДН-транзистора з урахуванням впливу зовнішнього кола дорівнює нулю. Таким чином, зазначена вимога є своєрідним наслідком закону Кирхгофа для напруг замкнутого електричного кола.

Враховавши, вихідні припущення, отримаємо, що індукований електричним зовнішнім полем заряд МДН-транзистора може бути накопиченим тільки в каналі і на кордонах розділу шарів:

$$Q_{ext} = -Q_{MISFET} = -(-Q_{MI} + Q_{IS} - Q_{ch} + Q_{B-ch} - Q_{BM}),$$

де Q_{MI} – абсолютна величина негативного заряду в діелектрику на границі метал-діелектрик, Q_{IS} – абсолютна величина позитивного заряду на границі діелектрик- напівпровідник в діелектрику, Q_{ch} – абсолютна величина індукованого негативного заряду в каналі, Q_{B-ch} – абсолютна величина позитивного заряду в підкладці на границі канал-підкладка, Q_{BM} – абсолютна величина негативного заряду в підкладці на границі підкладка-контакт. Розглядаючи цю послідовність зарядів у вигляді послідовно включених конденсаторів, отримаємо:

$$Q_{MI} = Q_{IS}, \quad Q_{B-ch} = Q_{BM},$$

і, як наслідок, індукований заряд визначиться як:

$$Q_{ext} = -(-0 + 0 - Q_{ch} + 0 - 0) = Q_{ch}.$$

Виходячи з того, що індукований зовнішнім джерелом, тобто напругою на затворі (U_{GS}), заряд (Q_{ch}) утворюється на границі діелектрик- напівпровідник і, з огляду на, що зазначену кордон можна розглядати в якості конденсатора, отримаємо, що індукований заряд дорівнює заряду підзатворного діелектрика:

$$Q_{ch} = Q_{IS}.$$

Отже, повний заряд основних носіїв в каналі визначається як:

$$Q = Q_{ch0} + Q_{ch} = Q_{ch0} + Q_{IS},$$

де Q_{ch0} – абсолютна рівноважна величина основних носіїв в каналі.

Висловлюючи абсолютні значення зарядів через їх нескінченно малі еквіваленти, отримаємо:

$$Q = \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch}(x, y, z) dx dz dy = \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch0}(x, y, z) dx dz dy + \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{IS}(x, y, z) dx dz dy,$$

де $qn_{ch0}(x, y, z)$ – рівноважна концентрація носіїв заряду в каналі, $qn_{IS}(x, y, z)$ – концентрація нерівноважних носіїв заряду в каналі.

Оскільки рівноважна концентрація носіїв заряду в каналі не залежить від координати, то інтегруючи, отримаємо:

$$Q_{ch0} = \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch0}(x, y, z) dx dz dy = \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{ch0} dx dz dy = qn_{ch0} WHL$$

і, отже, повний заряд буде визначений як:

$$Q = Q_{ch0} + Q_{IS} = qn_{ch0} WHL + \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{IS}(x, y, z) dx dz dy.$$

Отриманий вираз дозволяє стверджувати, що поставлена задача, в кінцевому рахунку, зводиться до знаходження функції розподілу концентрації індукованого в каналі заряду $qn_{IS}(x, y, z)$, який, в свою чергу, можна визначити через ємність підзатворного діелектрика (C_I) і напруга на цьому діелектрику (U_I):

$$Q_{IS} = \int_0^L \int_0^H \int_0^W qn_{IS}(x, y, z) dx dz dy = U_I(x, y, z) C_I(x, y, z).$$

Врахувавши останнім, шуканий заряд носіїв заряду в каналі запишеться як

$$Q = Q_{ch0} + Q_{IS} = qn_{ch0}WHL + U_I(x, y, z) C_I(x, y, z).$$

Оскільки ємність підзатворного діелектрика не залежить від будь-яких факторів, вираз для повного заряду істотно спрощується

$$Q = qn_{ch0}WHL + C_I U_I(x, y, z) = qn_{ch0}WHL + \frac{\epsilon_0 \epsilon WL}{d} U_I(x, y, z) = WL(qn_{ch0}H + c_I U_I(x, y, z)),$$

де d – товщина підзатворного діелектрика, $c_I = \epsilon_0 \epsilon / d$ – ємність підзатворного діелектрика на одиницю площі, тобто питома ємність підзатворного діелектрика.

Виносячи питому ємність підзатворного діелектрика за дужки, вираз для повного заряду основних носіїв в каналі набуде вигляду

$$Q = WLC_I(qn_{ch0}H/c_I + U_I(x, y, z)) = WLC_I(U_T + U_I(x, y, z)),$$

де $U_T = qn_{ch0}H/c_I$ – якоесь напруження, яке ми назвемо "пороговим", причому фізичний зміст цієї величини буде дано нижче.

Проаналізуємо другий доданок, що стоїть в дужках, тобто величину $U_I(x, y, z)$. Очевидно, що шуканий параметр, будучи напругою на діелектрику, тобто різницею потенціалів між поверхнею напівпровідника і металу, не повинен залежати від координати по осі x . Таким чином, вираз для повного заряду набуде вигляду

$$Q = WLC_I(U_T + U_I(x, y, z)) = WLC_I(U_T + U_I(y, z)).$$

Визначимо падіння напруги на діелектрику $U_I(y, z)$, виходячи з того, що потенціал на затворі щодо виток уздовж осі z – величина постійна, тоді як по відношенню до виток, тобто вздовж осі y , цей потенціал буде змінним. Таким чином, в силу однорідності розподілу електричного поля в каналі, отримаємо

$$\frac{dU_I(y, z)}{dy} = \frac{dU_I(y)}{dy} = U_{GS} - \frac{U_{DS}}{L} y,$$

тобто потенціал буде лінійно зменшуватися від напруги на початку $U_I(y)|_{y=0} = U_{GS}$ до $U_I(y)|_{y=L} = U_{GS} - U_{DS}$. Поділяючи змінні та інтегруючи, визначимо шукане падіння напруги на шарі ізолятора

$$U_I = \frac{1}{L} \int_0^L (U_{GS} - U_{DS} y/L) dy = \frac{1}{L} L (U_{GS} - \frac{1}{2} U_{DS}) = U_{GS} - \frac{1}{2} U_{DS}.$$

Таким чином, величина повного заряду визначиться так:

$$Q = WLC_I(U_T + U_I(x, y, z)) = WLC_I(U_T + U_{GS} - \frac{1}{2} U_{DS}),$$

і шукані вольт-амперні характеристики будуть мати наступний вигляд:

$$I_D = \frac{\mu_{ch}}{L^2} U_{DS} Q = \frac{\mu_{ch}}{L^2} U_{DS} WLC_I(U_T + U_{GS} - \frac{1}{2} U_{DS}) = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I ((U_T + U_{GS}) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2).$$

Аналіз, отриманого виразу, підтверджує феноменологію вихідних положень, а саме, повну незалежність отриманих вольт-амперних характеристик від конкретного типу МДН-транзистора. Вважаючи, що, названа нами вище величина "порогового" напруги, певна як $U_T = qn_{ch0}H/c_I$, більше нуля, тобто $U_T > 0$, прийдемо до опису МДН-транзистора з вбудованим n-каналом, і при цьому, кажучи про величину $-U_T$ буде доречним застосування терміну "напруга відсічення". З іншого боку, якщо величина порогового напруги менше дорівнює нулю, тобто $U_T \leq 0$, отримаємо опис МДН-транзистора з індукованим каналом, і при цьому, назва "порогове напруга" для величини $-U_T$ буде більш ніж доречно. Зазначене наочно демонструється конкретної математичної формою залежності (нагадаємо, що розглядається випадок р-підкладки):

- випадок МДН-транзистора з вбудованим n-каналом

$$I_D = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I \left((U_{GS} + U_T) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right), \quad U_{GS} > -U_T;$$

– випадок МДН-транзистора з індукованим n -каналом

$$I_D = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I \left((U_{GS} - U_T) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right), \quad U_{GS} > U_T.$$

Слід згадати також про "прихованому" обмеження наведеної феноменологічної аналітичної моделі, а саме, про те, що наведені формули мають фізичний сенс лише в області таких напружень на стоці, коли до малих прирощень струму в каналі ставляться такі ж малі лінійні збільшення напруги на стоці, тобто тільки в разі виконання закону Ома для будь-якого поперечного перерізу каналу (!). Остання умова не виконується в разі перекриття каналу, тобто відразу після досягнення точки насичення струму в каналі – $(U_{DS sat}, I_{D sat})$. Очевидно, що після

досягнення зазначеного значення, лінії струму стоку повинні бути замінені горизонтальними прямими, або розраховані по іншій теорії процесів протікання струму в МДН-транзисторі.

Зробимо розрахунок критичної кривої застосовності розробленої теорії, або, іншими словами, визначимо вид залежності струму насичення в каналі від напруги між виток і стоком $I_{D sat} = f(U_{DS})$.

Для знаходження струму насичення стоку транзистора знайдемо похідну цього струму по напрузі стік-витік

$$\frac{dI_D}{dU_{DS}} = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I (U_{GS} + U_T - U_{DS}).$$

Прирівнявши знайдену похідну нулю і дозволивши отримане рівняння щодо напруги стік-витік, визначимо залежність шуканого напруги насичення як функції напруги затвор-витік:

$$U_{DS sat} = U_{GS} + U_T.$$

Підставляючи $U_{DS} = U_{DS sat}$ в рівняння струму стоку транзистора, визначимо шукану залежність струму стоку насичення як функцію від напруги затвор-витік:

$$I_{D sat} \Big|_{f(U_{GS})} = \frac{W}{2L} \mu_{ch} c_I (U_{GS} + U_T)^2.$$

Аналогічно, визначимо залежність напруги на затворі, при якому настає насичення, як функції напруги стік-витік:

$$U_{GS sat} = U_{DS} - U_T,$$

і, підставивши отриманий вираз $U_{GS} = U_{GS sat}$ в рівняння струму стоку, визначимо шукану залежність струму стоку насичення як функцію від напруги стік-витік:

$$I_{D sat} \Big|_{f(U_{DS})} = \frac{W}{2L} \mu_{ch} c_I U_{DS}^2.$$

Крутизну визначимо як:

$$S = \frac{dI_{D sat}}{dU_{GS}} = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I (U_{GS} + U_T).$$

Розв'язок: Для визначення величини шуканої крутизни МДН-транзистора з вбудованим n -каналом, обчислимо додаткові величини, а саме, питому ємність підзатворного діелектрика c_I і напруга відсічки U_T :

$$c_I = \epsilon_0 \epsilon / d = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 / (10^{-5} \cdot 10^{-2}) = 3,364 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} / \text{м}^2 = 3,364 \cdot 10^{-8} \text{ Ф} / \text{см}^2,$$

$$U_T = q n_{ch0} H / c_I = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 10^{-4}}{3,364 \cdot 10^{-8}} = 4,76 \text{ В}.$$

Визначимо потрібну крутизну МДН-транзистора в режимі збагачення ($U_{GS} > 0$):

$$S = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I (U_{GS} + U_T) = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1450 \cdot 3,364 \cdot 10^{-8} \cdot (1 + 4,76)}{5 \cdot 10^{-4}} = 2,8 \cdot 10^{-4} \text{ А} / \text{В} = 0,28 \text{ мА} / \text{В}.$$

Задача 3. Визначити крутизну МОН-тріода S_0 в режимі збіднення при $n_{ch0} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, товщині каналу $H = 10^{-4} \text{ см}$, довжині каналу $L = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, поперечному розмірі каналу $W = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, товщині ізолятора під затвором $d = 10^{-5} \text{ см}$, $\epsilon_{\text{SiO}_2} = 4$, $\mu_n|_{\text{Si}} = 1450 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, напруга на затворі $U_{GS} = 1 \text{ В}$.

Розв'язок: Для визначення величини шуканої крутизни МДН-транзистора з вбудованим n -каналом, обчислимо додаткові величини, а саме, питому ємність підзатворного діелектрика c_I і напруга відсічки U_T :

$$c_I = \epsilon_0 \epsilon / d = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 / (10^{-5} \cdot 10^{-2}) = 3,364 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} / \text{м}^2 = 3,364 \cdot 10^{-8} \text{ Ф} / \text{см}^2,$$

$$U_T = qn_{ch0}H/c_I = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 10^{-4}}{3,364 \cdot 10^{-8}} = 4,76 \text{ В}.$$

Визначимо потрібну крутизну МДН-транзистора в режимі збіднення ($U_{GS} < 0$):

$$S = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I (U_{GS} + U_T) = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1450 \cdot 3,364 \cdot 10^{-8} \cdot (-1 + 4,76)}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ А} / \text{В} = 0,18 \text{ мА} / \text{В}.$$

Задача 4. Визначити крутизну МОН-тріода з інверсним каналом S_0 при $n_{ch0} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, товщині каналу $H = 10^{-4} \text{ см}$, довжині каналу $L = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, поперечному розмірі каналу $W = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, товщині ізолятора під затвором $d = 10^{-5} \text{ см}$, $\epsilon_{\text{SiO}_2} = 4$, $\mu_p|_{\text{Si}} = 500 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, напруга на затворі $U_{GS} = 14,8 \text{ В}$.

Розв'язок (точне): Для визначення величини шуканої крутизни МДН-транзистора з вбудованим n -каналом, обчислимо додаткові величини, а саме, питому ємність підзатворного діелектрика c_I і напруга відсічки U_T :

$$c_I = \epsilon_0 \epsilon / d = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 / (10^{-5} \cdot 10^{-2}) = 3,364 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} / \text{м}^2 = 3,364 \cdot 10^{-8} \text{ Ф} / \text{см}^2,$$

$$U_T = qn_{ch0}H/c_I = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 10^{-4}}{3,364 \cdot 10^{-8}} = 4,76 \text{ В}.$$

Визначимо потрібну крутизну МДН-транзистора в режимі збіднення ($U_{GS} < 0$):

$$S = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I (U_{GS} + U_T) = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 500 \cdot 3,364 \cdot 10^{-8} \cdot (14,8 - 4,76)}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ А} / \text{В} = 0,167 \text{ мА} / \text{В}.$$

Розв'язок: Для визначення величини шуканої крутизни МДН-транзистора з вбудованим n -каналом, обчислимо додаткові величини, а саме, питому ємність підзатворного діелектрика c_I і напруга відсічки U_T :

$$c_I = \epsilon_0 \epsilon / d = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4}{10^{-5} \cdot 10^{-2}} = 3,364 \cdot 10^{-4} \text{ Ф} / \text{м}^2 \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ Ф} / \text{см}^2,$$

$$U_T = qn_{ch0}H/c_I = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 10^{-4}}{3,364 \cdot 10^{-8}} = 4,76 \text{ В} \approx 4,8 \text{ В}.$$

Визначимо потрібну крутизну МДН-транзистора в режимі збіднення ($U_{GS} < 0$):

$$S = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I (U_{GS} + U_T) = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 500 \cdot 3 \cdot 10^{-8} \cdot (14,8 - 4,8)}{5 \cdot 10^{-4}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ А} / \text{В} = 0,15 \text{ мА} / \text{В}.$$

Задача 5. Визначити коефіцієнти посилення по току K_I , по напрузі K_U , по потужності K_P , МОН-тріода при крутизні $S_0 = 1 \text{ мА} / \text{В}$, ємності затвора $C_G = 1 \text{ нФ}$, прохідній $C_{GD} = 0,01 \text{ нФ}$, стоку $C_D = 1 \text{ нФ}$. Визначити граничні частоти посилення по току f_I , по напрузі f_U , по потужності f_P .

Розв'язок: Визначимо шукані коефіцієнти посилення:
– по струму

$$K_I = \frac{S_0}{2\pi f C_G} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3,1416 \cdot f \cdot 1 \cdot 10^{-12}} \approx 1,59 \cdot \frac{10^8}{f};$$

– по напрузі

$$K_U = \frac{S_0}{2\pi f C_D} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3,1416 \cdot f \cdot 1 \cdot 10^{-12}} \approx 1,59 \cdot \frac{10^8}{f};$$

– по потужності

$$K_P = K_I K_U = \frac{1,59 \cdot 10^8}{f} \cdot \frac{1,59 \cdot 10^8}{f} \approx 2,53 \cdot \left(\frac{10^8}{f}\right)^2.$$

Оцінімо в числах величини шуканих коефіцієнтів, припустивши, що посилюється сигнал на частоті 1 МГц

$$K_I = K_U = 159 \text{ и } K_P = 25300.$$

Шукані граничні частоти визначимо, прирівнявши значення відповідного коефіцієнта одиниці. Так для граничної частоти підсилення по струму, отримаємо таке рівняння

$$K_I = 1,59 \cdot \frac{10^8}{f_I} = 1,$$

розв'язавши яке, отримаємо

$$f_I = 1,59 \cdot 10^8 \text{ Гц} = 159 \text{ МГц}.$$

Поступаючи аналогічно, визначимо відповідні величини

$$f_U = 1,59 \cdot 10^8 \text{ Гц} = 159 \text{ МГц},$$

$$f_P = 1,59 \cdot 10^8 \text{ Гц} = 159 \text{ МГц}.$$

Задача 6. Побудувати вольт-амперну характеристику польового тріода в режимі збагачення при наступних параметрах: $n_{ch0} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, товщині каналу $H = 10^{-4} \text{ см}$, довжині каналу $L = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, поперечному розмірі каналу $W = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}$, товщині ізолятора під затвором $d = 10^{-5} \text{ см}$, $\epsilon|_{\text{SiO}_2} = 4$, $\mu_n|_{\text{Si}} = 1450 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. **Визначити струм насичення і напруга, при якому настає насичення струму через канал тріода.**

Розв'язок: Для визначення величини шуканої крутизни МДН-транзистора з вбудованим n -каналом, обчислимо додаткові величини, а саме, питому ємність подзатворного діелектрика c_I і напруга відсічки U_T :

$$c_I = \epsilon_0 \epsilon / d = 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 4 / (10^{-5} \cdot 10^{-2}) = 3,364 \cdot 10^{-4} \text{ Ф/м}^2 = 3,364 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/см}^2,$$

$$U_T = q n_{ch0} H / c_I = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{16} \cdot 10^{-4}}{3,364 \cdot 10^{-8}} = 4,76 \text{ В}.$$

Визначимо шукані вольт-амперні характеристики МДН-транзистора в режимі збагачення ($U_{GS} > 0$):

$$I_D = \frac{W}{L} \mu_{ch} c_I \left((U_{GS} + U_T) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right),$$

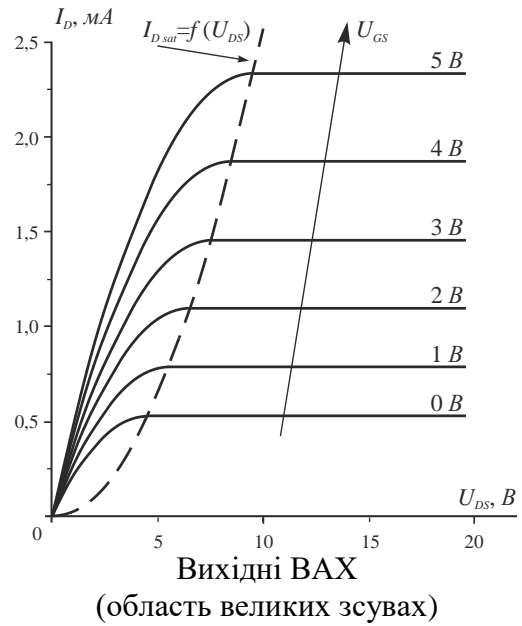
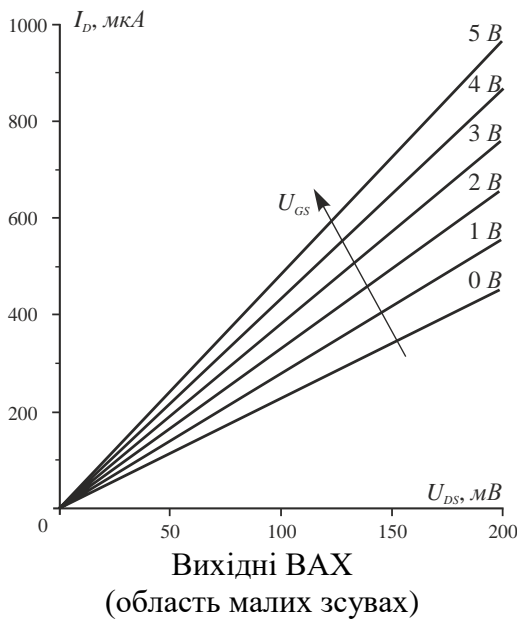
Обчислюючи останній вираз, отримаємо

$$I_D = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1450 \cdot 3,364 \cdot 10^{-8}}{5 \cdot 10^{-4}} \cdot \left((U_{GS} + 4,76) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right) = 5,135 \cdot 10^{-5} \cdot \left((U_{GS} + 4,76) U_{DS} - \frac{1}{2} U_{DS}^2 \right).$$

В силу обмежень теоретичної моделі, визначимо кордон її застосовності, за межами якої, будемо вважати струм в каналі рівним току насичення

$$I_{D \text{ sat}} \Big|_{f(U_{DS})} = \frac{W}{2L} \mu_{ch} c_I U_{DS}^2 = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 1450 \cdot 3,364 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \cdot U_{DS}^2 = 2,568 \cdot 10^{-5} \cdot U_{DS}^2.$$

Розрахункові вольт-амперні характеристики наведені на рисунку:



Розділ 7 Оптичні властивості напівпровідників

Задача 1. Обчислити енергію фотонів для жовтого світла з довжиною хвилі $\lambda = 5893 \text{ \AA}$, синього світла з довжиною хвилі $\lambda = 4210 \text{ \AA}$ і для ультрафіолетового випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 2557 \text{ \AA}$.

Розв'язок: Довжині хвилі λ відповідає частота $\nu = c/\lambda$, і, відповідно енергія фотона на цій частоті буде рівною

$$E = h\nu = hc/\lambda = \frac{299792458 \cdot 6,6261 \cdot 10^{-34}}{\lambda} = \frac{1,98645 \cdot 10^{-25}}{\lambda} \text{ Дж} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{\lambda} \text{ эВ}.$$

Підставляючи числові дані, отримаємо:

$$E_{\lambda=5893 \text{ \AA}} (\text{Yellow}) = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{5893} = 2,104 \text{ эВ},$$

$$E_{\lambda=4210 \text{ \AA}} (\text{Indigo}) = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{4210} = 2,945 \text{ эВ},$$

$$E_{\lambda=2557 \text{ \AA}} (\text{UV}) = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{2557} = 4,849 \text{ эВ}.$$

Задача 2. Визначити швидкість оптичної генерації G нерівноважних носіїв заряду в пластині кремнію на глибині $b = 100 \text{ мкм}$ від освітлюваної поверхні при фотозбудженні монохроматичним випромінюванням інтенсивністю $I_{\Phi 0} = 10^{20} \text{ м}^{-2} \text{ с}^{-1}$, якщо показник поглинання матеріалу на довжині хвилі випромінювання $\alpha = 5 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$, а коефіцієнт відбиття випромінювання $R = 0,3$. Квантовий вихід внутрішнього фотоефекту η прийняти рівним одиниці.

Розв'язок: У разі завдання інтенсивності випромінювання в одиницях "числа фотонів щосекунди поглинаються одиницею поверхні", тобто $[I] = [\text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}]$ швидкість оптичної генерації нерівноважних носіїв заряду визначається як:

$$G = \eta \alpha I_0 e^{-\alpha b},$$

де $I_0 = I_{\Phi 0} (1 - R)$ – інтенсивність випромінювання, що проник в матеріал, поблизу опромінюваної поверхні. Отже, шукана швидкість оптичної генерації нерівноважних носіїв заряду визначиться так

$$G = \eta \alpha I_{\Phi 0} (1 - R) e^{-\alpha b} = 1 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 10^{20} \cdot (1 - 0,3) e^{-5 \cdot 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 2,358 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}.$$

Задача 3. При температурі $T = 300\text{ K}$ для монохроматичного випромінювання з довжиною хвилі 1 мкм , показник поглинання кремнію $\alpha = 10^4\text{ м}^{-1}$, а коефіцієнт відбиття випромінювання $R = 0,3$. Визначити, яка частка падаючого потоку випромінювання з інтенсивністю I_{Φ_0} проникне вглиб кремнієвої пластини на величину $d = 300\text{ мкм}$ при нормальному падінні променів.

Розв'язок: При падінні потоку випромінювання з інтенсивністю I_{Φ_0} на поверхню напівпровідника, частина потоку RI_{Φ_0} відіб'ється, отже, поблизу опромінюваної поверхні інтенсивність падаючого потоку стане рівною $(1-R)I_{\Phi_0}$. У міру поширення всередину напівпровідника інтенсивність проникаючого випромінювання буде зменшуватися за експоненціальним законом і на глибині d стане рівною:

$$I_d = (1-R)I_{\Phi_0}e^{-\alpha d}.$$

Шукане частка падаючого потоку випромінювання з інтенсивністю I_{Φ_0} , проникаючого углиб кремнієвої пластини на величину $d = 300\text{ мкм}$ за умови нормального падіння променів

$$\frac{I_d}{I_{\Phi_0}} \cdot 100\% = (1-R)e^{-\alpha d} \cdot 100\% = (1-0,3) \cdot e^{-10^4 \cdot 300 \cdot 10^{-6}} \cdot 100\% = 3,485\%.$$

Задача 4. Визначити надмірну концентрацію носіїв заряду в епітаксіальному шарі кремнію товщиною $d = 20\text{ мкм}$ при оптичному збудженні монохроматичним випромінюванням з інтенсивністю $I_0 = 10^{21}\text{ м}^{-2}\text{ с}^{-1}$ за умови нормального падіння променів, якщо час життя нерівноважних носіїв заряду $\tau = 10\text{ нс}$, а показник власного поглинання кремнію на довжині хвилі випромінювання $\alpha = 2000\text{ м}^{-1}$. Квантовий вихід внутрішнього фотоефекту η прийняти рівним одиниці. Прийняти коефіцієнт відображення R рівним нулю.

Розв'язок: Надмірна концентрація носіїв заряду визначається так

$$\Delta n = \tau G,$$

де $G = \eta \alpha I_{\Phi_0}$ – швидкість оптичної генерації нерівноважних носіїв заряду. Отже, шукана величина визначиться так

$$\Delta n = \tau \eta \alpha I_{\Phi_0} = 10 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 2000 \cdot 10^{21} = 2 \cdot 10^{19}\text{ м}^{-3}.$$

Задача 5. Використовуючи умови попередньої задачі, знайти відносну зміну питомої провідності кремнію під дією оптичного збудження, якщо питомий опір матеріалу в темряві $\rho_0 = 0,2\text{ Ом} \cdot \text{м}$, а рухливість електронів і дірок $\mu_n = 0,14\text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$ і $\mu_p = 0,05\text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$ відповідно.

Розв'язок: Визначимо питому темнову фотопровідність:

$$\sigma_0 = \rho_0^{-1} \text{ и } \sigma_{\Phi} = q \Delta n (\mu_n + \mu_p) = q \tau \eta \alpha I_{\Phi_0} (\mu_n + \mu_p).$$

Звідси, шукана відносна зміна питомої провідності кремнію під дією оптичного збудження визначиться:

$$\sigma_{\Phi} / \sigma_0 = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 1 \cdot 2000 \cdot 10^{21} (0,14 + 0,05)}{1/0,2} = 0,122.$$

Задача 6. Питомий опір чистого бездомішкового германію при кімнатній температурі $\rho_0 = 50\text{ Ом} \cdot \text{см}$. Після включення джерела світла він дорівнює: $\rho_{\Phi_0} = 40\text{ Ом} \cdot \text{см}$; а через $t = 8,0\text{ мс}$ після виключення джерела: $\rho_{\Phi_1} = 45\text{ Ом} \cdot \text{см}$. Знайти середній час життя електронів і дірок.

Розв'язок: Визначимо величини всіх заданих фотопровідностей:

$$\sigma_{\Phi_0} = \rho_{\Phi_0}^{-1} = \rho_0^{-1} + \Delta \sigma_{\Phi_0} \text{ и } \sigma_{\Phi_1} = \rho_{\Phi_1}^{-1} = \rho_0^{-1} + \Delta \sigma_{\Phi_0} e^{-t/\tau}.$$

Перетворимо отримані рівняння:

$$\rho_{\Phi_0}^{-1} - \rho_0^{-1} = \Delta \sigma_{\Phi_0} \text{ и } \rho_{\Phi_1}^{-1} - \rho_0^{-1} = \Delta \sigma_{\Phi_0} e^{-t/\tau}.$$

Ділячи перше з них на друге, отримаємо рівняння щодо величини τ :

$$\frac{\rho_0 - \rho_{\Phi 0}}{\rho_0 - \rho_{\Phi 1}} \cdot \frac{\rho_{\Phi 1}}{\rho_{\Phi 0}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Вирішуючи отримане рівняння, знайдемо шуканий час життя:

$$\tau = \frac{t}{\ln\left(\frac{\rho_0 - \rho_{\Phi 0}}{\rho_0 - \rho_{\Phi 1}} \cdot \frac{\rho_{\Phi 1}}{\rho_{\Phi 0}}\right)} = \frac{8}{\ln\left(\frac{50-40}{50-45} \cdot \frac{45}{40}\right)} = 9,865 \text{ мкс}.$$

Задача 7. *Визначити відношення питомих провідностей півки сульфїду кадмію n-типу товщиною 100 мкм в темряві і при однорїдному оптичному збудженні монохроматичним випромїнюванням інтенсивністю $I_{\Phi 0}(1-R) = 10^{20} \text{ м}^{-2}\text{с}^{-1}$, якщо рївноважна концентрація електронів в зразку $n = 10^{19} \text{ м}^{-3}$, показник поглинання $\alpha = 10^2 \text{ м}^{-1}$, а час життя нерївноважних носїїв заряду $\tau_n = 10 \text{ нс}$. Внеском дїрок в фотопровїдність знехтувати. Квантовий вихїд внутрїшнього фотоефекту η покласти рївним одиниці.*

Розв'язок: Заданї фотопровїдностї визначаються як $\sigma_0 = qn\mu_n$ і $\sigma_{\Phi} = \sigma_0 + q\Delta n\mu_n$, отже, шукане вїдношення запишемо у вигляді:

$$\sigma_{\Phi} / \sigma_0 = 1 + \Delta n / n = 1 + \frac{\tau\eta\alpha I_{\Phi 0}}{n} = 1 + \frac{\tau\eta\alpha I_{\Phi 0}(1-R)}{n} = 1 + \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^2 \cdot 10^{20}}{10^{19}} = 11.$$

Задача 8. *На пластину з арсенїду галїю площею $S = 100 \text{ мм}^2$ і товщиною $d = 0,5 \text{ мм}$ падає монохроматичне випромїнювання з довжиною хвилї $\lambda = 556 \text{ нм}$. Визначити, яке число електронно-доручених пар щомитї генерується в обсязі напївпровїдника при освїтленостї $E_{\Phi} = 100 \text{ лк}$. Квантовий вихїд внутрїшнього фотоефекту η прийняти рївним одиниці. Процесами вїдображення знехтувати. На заданїй довжинї хвилї показник поглинання матерїалу $\alpha = 10^6 \text{ м}^{-1}$. Свїтловий еквївалент потоку випромїнювання $K_{\lambda} = 683 \text{ лм / Вт}$.*

Розв'язок: Питома потужнїсть потоку випромїнювання, що поглинається, визначається як $p = E_{\Phi} / K_{\lambda}$, а абсолютна як $P = pS$. Дїлячи величину абсолютної потужностї на енергїю фотона $E_{\lambda} = h\nu$, визначимо шукане число електронно-дїркових пар, якї щомитї генеруються в об'ємі напївпровїдника:

$$G = \frac{SE_{\Phi}}{K_{\lambda} h\nu} = \frac{SE_{\Phi} \lambda}{K_{\lambda} hc} = \frac{100 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 556 \cdot 10^{-9}}{683 \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,99792458} = 4,098 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}\text{с}^{-1}.$$

Задача 9. *Знайти свївїдношення числа носїїв заряду, що проходять в одиницю часу через електроди фоточутливого напївпровїдника, до числа фотонів, що поглинаються напївпровїдником за цей же промїжок часу, якщо вїдомо, що при повному поглинаннї монохроматичного випромїнювання ($\lambda = 556 \text{ нм}$) потужнїстю $P = 100 \text{ мкВт}$, фотострум становить $I_{\Phi} = 10 \text{ мА}$. Квантовий вихїд внутрїшнього фотоефекту η прийняти рївним одиниці.*

Розв'язок: Число фотонів що поглинаються щосекунди, або, що те ж саме, число електронно-дїркових пар, якї генеруються щосекунди дорївнює:

$$N_{\Phi} = P / (h\nu).$$

Число носїїв заряду, якї щосекунди беруть участь у створеннї фотоструму, дорївнює $N_I = I / q$. Визначимо свївїдношення числа носїїв заряду, що приходять в одиницю часу через електроди фоточутливого напївпровїдника, до числа фотонів, що поглинаються напївпровїдником за цей же промїжок часу:

$$N_I / N_{\Phi} = \frac{h\nu I}{qP} = \frac{hcI}{q\lambda P} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 2,99792458 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 556 \cdot 10^{-9}} = 2194 \approx 2200.$$

Задача 10. *Пластина германїю n-типу довжиною $l = 10 \text{ мм}$, шириною $a = 2 \text{ мм}$ та товщиною $d = 0,5 \text{ мм}$ має подовженїй опїр $R = 2 \text{ кОм}$. Час життя неосновних носїїв заряду $\tau = 100 \text{ мкс}$.*

На зразок нормально до поверхні падає монохроматичне випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,546 \text{ мкм}$. На цій довжині хвилі світловий еквівалент потоку випромінювання $K_\lambda = 625 \text{ лм/Вт}$. Вважаючи, що весь падаючий на зразок світловий потік повністю витрачається на генерацію електронно-діркових пар, визначити, при якій освітленості зразка його опір зменшиться в два рази. Квантовий вихід внутрішнього фотоефекту η прийняти рівним одиниці, а рухливість електронів і дірок відповідно $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$ і $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2 / (\text{В} \cdot \text{с})$. При даній температурі власна концентрація носіїв $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Поверхневою рекомбінацією знехтувати.

Розв'язок: Число фотонів що поглинаються щосекунди, або, що те ж саме, число електронно-діркових пар, які генеруються щосекунди, дорівнює:

$$N_\Phi = P / (h\nu),$$

де $P = E_\Phi / K_\lambda$ – абсолютна потужність потоку випромінювання, що поглинається, E_Φ – шукана величина освітленості.

Величину абсолютної потужності P визначимо за питомою потужністю поглинаемого потоку випромінювання p :

$$P = pS = S E_\Phi / K_\lambda,$$

де $S = la$ – освітлювана площа.

Враховавши, що $\nu = c/\lambda$, отримаємо вираз для числа фотонів, які щосекунди поглинаються:

$$N_\Phi = \frac{la\lambda E_\Phi}{hcK_\lambda}.$$

Виходячи з останнього, визначимо величину надлишкової фотопровідності, яка генерується в об'ємі напівпровідника:

$$\sigma_\Phi = q \cdot \frac{N_\Phi \tau}{lad} \cdot (\mu_n + \mu_p) = \frac{q\lambda\tau E_\Phi (\mu_n + \mu_p)}{hcK_\lambda d}.$$

Вираз для темної питомої провідності зразка, згідно з вихідними даними, визначиться як:

$$\sigma_0 = l / (Rad).$$

Згідно з умовами завдання шукана зміна провідності під дією освітлення:

$$(\sigma_0 + \sigma_\Phi) / \sigma_0 = 1 + \sigma_\Phi / \sigma_0 = m = 2$$

або, враховавши всі вище наведені викладки:

$$1 + \sigma_\Phi / \sigma_0 = \frac{q\lambda\tau E_\Phi (\mu_n + \mu_p) Ra}{hcK_\lambda l} = m.$$

Вирішуючи отримане рівняння, знайдемо шукану освітленість:

$$E_\Phi = \frac{(m-1)hcK_\lambda l}{q\lambda\tau(\mu_n + \mu_p)Ra} = \frac{(2-1) \cdot 6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 299792458 \cdot 625 \cdot 10^{-3}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,546 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^{-6} \cdot (0,39+0,19) \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \approx 61170 \text{ лк}.$$

Задача 11. Скільки електронів і дірок утворюється в кристалі при поглинанні їм $E_\Phi = 10^{-4} \text{ Дж/см}^{-2}$ світлової енергії з довжиною хвилі $\lambda = 6000 \text{ \AA}$? Яка щільність електричного заряду (в кулонах на кубічний сантиметр) потече по зовнішньому колу кристала, якщо прикладене до нього електричне поле досить сильне, щоб доставити всі вільні носії заряду до електродів? Квантовий вихід внутрішнього фотоефекту η дорівнює одиниці.

Розв'язок: Шукана концентрація електронно-діркових пар, що генеруються, дорівнює:

$$\Delta n = \frac{E_\Phi}{h\nu} = \frac{E_\Phi \lambda}{hc} = \frac{10^{-4} \cdot 6000 \cdot 10^{-10}}{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 299792458} = 3,021 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3} \approx 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

а шукана величина щільності електричного заряду, який протікає при цьому у зовнішньому колі дорівнює:

$$\rho_q = q\Delta n = 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{14} = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ Кл} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Задача 12. На пластину напівпровідника розмірами $l \times b \times d$ перпендикулярно плоскій поверхні падає потік монохроматичного випромінювання інтенсивністю $I_{\Phi 0}$. Показник заломлення напівпровідника n_0 і показник оптичного поглинання α . Вважаючи, що в створенні фотоструму I_{Φ} беруть участь тільки електрони, і нехтуючи темновим струмом, довести, що:

$$I_{\Phi} = q\mu_n \tau_n \frac{b}{l} I_{\Phi 0} \frac{4n_0 U}{(n_0 + 1)^2} (1 + e^{\alpha/d})$$

де τ_n – час життя електронів; η – квантовий вихід внутрішнього фотоефекту; d – розмір напівпровідникової пластини (в напрямку падіння світла); U – напруга, прикладена уздовж пластини (за розміром l).

Доведення: Величина фотоструму опору з урахуванням зневаги темної складової і впливу поверхневої рекомбінації визначиться відповідно до закону Ома

$$I_{\Phi} = \Delta \Sigma_{\Phi} U,$$

де $\Delta \Sigma_{\Phi} = \Delta \sigma_{\Phi} S_{\Phi} / l$ – фотопровідність, $\Delta \sigma_{\Phi}$ – питома фотопровідність, S_{Φ} – площа поперечного перерізу каналу фотопровідності, яка в першому наближенні визначається як $S_{\Phi} = bd$. Але, врахувавши той факт, що практично весь світловий потік поглинається в тонкому приповерхневому шарі товщиною $\alpha^{-1} \ll d$, отримаємо, у другому наближенні, $S_{\Phi} = b/\alpha$.

Величину питомої провідності, в згоді з умовами завдання, визначимо як:

$$\Delta \sigma_{\Phi} = q\mu_n \eta \tau_n \alpha I_0,$$

де $I_0 = I_{\Phi 0} (1 - R) e^{-\alpha d}$ – інтенсивність монохроматичного випромінювання, що поглинається напівпровідником.

З умови нормального падіння випромінювання визначимо величину $(1 - R)$:

$$1 - R = 1 - \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2} = \frac{4n}{(n + 1)^2}.$$

Підставляючи отримані співвідношення в вираз для величини фотоструму, отримаємо:

$$I_{\Phi} = q\mu_n \tau_n \frac{b}{l} I_0 \frac{4n_0 U}{(n_0 + 1)^2} (1 + e^{\alpha/d}).$$

Очевидно, що отриманий вираз дорівнює заданому, що й треба було довести.

Задача 13. У ряді випадків діелектрична проникність речовини виявляється величиною комплексної або негативною і показник заломлення - відповідно комплексним ($n^* = n - ik$) або чисто уявним ($n^* = ik$). Написати для цих випадків рівняння плоскої монохроматичної хвилі і з'ясувати фізичний зміст таких показників заломлення.

Відповідь: У загальному випадку, рівняння плоскої монохроматичної хвилі, яка рухається вздовж напрямку, задається системою рівнянь:

$$\begin{cases} E = E_0 e^{i(\omega t - kx + \phi)} \\ H = H_0 e^{i(\omega t - kx + \phi)} \end{cases},$$

де ϕ – початкова фаза хвилі, яка за вибором початку координат, в разі розгляду однієї єдиної монохроматичної хвилі, завжди може бути обнуленою, а система рівнянь такої хвилі запишеться як:

$$\begin{cases} E = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \\ H = H_0 e^{i(\omega t - kx)} \end{cases}$$

Оскільки більшість оптичних середовищ - діелектрики, то в більшості практичних випадків друге рівняння не враховують, вважаючи, що плоска монохроматична хвиля рухається вздовж напрямку x :

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kx)}.$$

Для зв'язку з показником заломлення, зробимо елементарні перетворення і запишемо це рівняння в такому вигляді:

$$E = E_0 e^{i\omega(t - kx/\omega)} = E_0 e^{i\omega(t - nx/c)}.$$

Зауважимо, що фізичний зміст має тільки дійсна частина даного рівняння:

$$\text{Re}(E) = \text{Re}\left(E_0 e^{i\omega(t - nx/c)}\right) = E_0 \cos(\omega t - \omega nx/c).$$

Підставляючи в наведене рівняння світлової хвилі комплексний показник заломлення, отримаємо:

$$E = E_0 e^{i\omega(t - n^*x/c)} = E_0 e^{i\omega t - i\omega x(n - ik)/c} = E_0 e^{i\omega(t - nx/c) + k\omega x/c}.$$

Знаходячи дійсну частину, отримаємо:

$$\text{Re}(E) = \text{Re}\left(E_0 e^{i\omega(t - nx/c) + k\omega x/c}\right) = E_0 e^{-k\omega x/c} \cos(\omega t - \omega nx/c).$$

Порівнюючи отриманий результат з аналогічним виразом для випадку дійсного показника заломлення, приходимо до висновку, що комплексний показник заломлення, як і дійсний, характеризує здатність світла переломлюватися і відбиватися, і на додаток до цього дозволяє враховувати процеси поглинання світла при його проходженні крізь речовину. Останнє враховується величинами ik і $\exp(-k\omega x/c)$ в відповідних формах рівняння плоскої світлової монохроматичної хвилі.

Задача 14. Плоска монохроматична світлова хвиля інтенсивності I_0 падає нормально на пластинку товщиною d , коефіцієнт відображення кожної поверхні якої дорівнює R . Врахувавши багаторазові відбиття, знайти інтенсивність минулого світла, якщо пластинка ідеально прозора (поглинання відсутнє) і, в разі, коли лінійний показник поглинання дорівнює α .

Розв'язок: Розглянемо початковий ділянку шляху монохроматичної світлової хвилі інтенсивності I_0 за умови нормального падіння на напівпровідникову пластинку. Аж до кордону розділу повітря-пластинка, інтенсивність світлової хвилі залишається постійною і рівною I_0 . На кордоні розділу повітря-пластинка відбувається розщеплення світлової хвилі на дві складові. Перша інтенсивності RI_0 обумовлена відображенням світлової хвилі від кордону розділу, а друга інтенсивності $(1-R)I_0$ - заломленням світлової хвилі на тій же границі. Далі, світлова хвиля поширюється вглиб напівпровідника без будь-яких розщеплення, але з втратами пов'язаними з її поглинанням і у протилежної сторони пластинки її інтенсивність стане рівною $(1-R)I_0 e^{-\alpha d}$. Досягнувши протилежного краю пластинки, тобто на границі напівпровідник-повітря, знову відбудеться розщеплення світлової хвилі на дві складові. Перша складова $R(1-R)I_0 e^{-\alpha d}$ обумовлена відображенням світлової хвилі від границі розділу. Друга складова з інтенсивністю $(1-R)^2 I_0 e^{-\alpha d}$, обумовлена заломленням світлової хвилі на границі напівпровідник-повітря, сформує світловий потік, що пройшов напівпровідникову пластину за перший прохід. Що стосується першої компоненти, то ця світлова хвиля буде поширюватися в сторону освітлюваної поверхні пластинки, втрачаючи при цьому в інтенсивності за рахунок її поглинання напівпровідником, причому у освітленій поверхні її інтенсивність стане рівною $R(1-R)I_0 e^{-2\alpha d}$. Після цього відбудеться чергове розщеплення світлової хвилі на заломлену і відбиту.

Інтенсивність заломленої світлової хвилі буде дорівнює $R(1-R)^2 I_0 e^{-2\alpha d}$, а відбитої – $R^2(1-R)I_0 e^{-2\alpha d}$. Наступні проходи світлової хвилі розглядаються аналогічно описаному першому проходу. В результаті, отримаємо для інтенсивності світла ряд компонент: $I_{T1} = (1-R)^2 I_0 e^{-\alpha d}$, $I_{T2} = R^2(1-R)^2 I_0 e^{-3\alpha d}$, $I_{T3} = R^4(1-R)^2 I_0 e^{-5\alpha d}$, ..., $I_{Tk} = R^{2k}(1-R)^2 I_0 e^{-(2k+1)\alpha d}$, Шукана інтенсивність світла, яке пройшло крізь напівпровідник буде сумою всіх зазначених компонент:

$$I_T = \sum_{k=0}^{\infty} I_{Tk} = (1-R)^2 I_0 \sum_{k=0}^{\infty} R^{2k} e^{-(2k+1)\alpha d}.$$

Провівши сумування, отримаємо вираз для шуканої величини інтенсивності світла, що пройшло через напівпровідник, за умови його нормального падіння і з урахуванням багатократних віддзеркалень:

$$I_T = \frac{(1-R)^2 I_0 e^{\alpha d}}{e^{2\alpha d} - R^2} = \frac{(1-R)^2 I_0 e^{-\alpha d}}{1 - R^2 e^{-2\alpha d}}.$$

Останній вираз, в разі ідеально прозорої пластинки, набуде вигляду:

$$I_T = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1-R)^2 I_0 e^{-\alpha d}}{1 - R^2 e^{-2\alpha d}} = \frac{(1-R)^2}{1-R^2} I_0 = \frac{1-R}{1+R} I_0.$$

Задача 15. Природне світло падає під кутом Брюстера на поверхню скла. Визначити за допомогою формул Френеля коефіцієнт відображення.

Розв'язок: Відомо, що природне світло можна розглядати як суму двох світлових потоків однакової інтенсивності з різною орієнтацією по відношенню до площини падіння світлового вектору: p -хвиля і s -хвиля. У першій з них світловий вектор коливається в площині падіння, а в другій - в площині перпендикулярній площині падіння. Для знаходження шуканого коефіцієнту відбиття, врахуємо, що при падінні світла під кутом Брюстера заломляється тільки s -хвиля, тоді як p -хвиля повністю відбивається. В силу останнього розглянемо формули Френеля для амплітудних коефіцієнтів відбиття:

$$r_p = -\frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)} \text{ и } r_s = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)},$$

де i і r – кути падіння і заломлення, відповідно.

Зробимо тригонометричні перетворення наведених виразів:

$$r_p = \frac{\sin^2 i \cos r \sin r - \cos^2 r \cos i \sin i + \cos^2 i \cos r \sin r - \sin^2 \cos i \sin i}{\sin^2 i \cos r \sin r + \cos^2 r \cos i \sin i + \cos^2 i \cos r \sin r + \sin^2 \cos i \sin i},$$

$$r_s = \frac{\cos i \sin r - \cos r \sin i}{\cos i \sin r + \cos r \sin i}.$$

Провівши підстановку $\cos^2 i = 1 - \sin^2 i$ і $\cos^2 r = 1 - \sin^2 r$ та відповідні перетворення, спростимо вираз для r_p :

$$r_p = \frac{\cos r \sin r - \cos i \sin i}{\cos r \sin r + \cos i \sin i}.$$

Ділячи чисельники і знаменники отриманих виразів на $\sin r$ і використовуючи закон Снелліуса:

$$\sin i / \sin r = n_{21} = n_2 / n_1,$$

де n_{21} – відносний показник заломлення, а n_1 і n_2 – показники заломлення першого і другого середовища, відповідно, перетворимо отримані вирази для амплітудних коефіцієнтів відбиття:

$$r_p = \frac{n_1 \cos r - n_2 \cos i}{n_1 \cos r + n_2 \cos i} \text{ и } r_s = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos r}{n_1 \cos i + n_2 \cos r}.$$

Оскільки при падінні під кутом Брюстера $i+r = \pi/2$ і $r_p = 0$, то остаточні вирази для амплітудних коефіцієнтів набувають вигляду:

$$\lim_{r \rightarrow \pi/2-i} r_p = \frac{n_1 \sin i - n_2 \cos i}{n_1 \sin i + n_2 \cos i} = 0 \text{ и } \lim_{r \rightarrow \pi/2-i} r_s = \frac{n_1 \cos i - n_2 \sin i}{n_1 \cos i + n_2 \sin i}.$$

З першого виразу прийдемо до рівняння щодо кута падіння:

$$n_1 \sin i - n_2 \cos i = 0,$$

розв'язавши яке, визначимо величину кута Брюстера:

$$\theta_B = \arctan(n_2/n_1) = \arctan(n_{21}).$$

Ділячи чисельник і знаменник другого виразу на $\cos i$, отримаємо:

$$r_s = \lim_{i \rightarrow \theta_B} \frac{n_1 - n_2 \sin i / \cos i}{n_1 + n_2 \sin i / \cos i} = \frac{n_1 - n_2 \tan \theta_B}{n_1 + n_2 \tan \theta_B}.$$

Підставляючи в r_s величину кута Брюстера і виконуючи необхідні перетворення, отримаємо остаточний вираз для амплітудного коефіцієнта відображення s -хвилі:

$$r_s = -\frac{n_{21}^2 - 1}{n_{21}^2 + 1}.$$

Енергетичні коефіцієнти відображення p - і s -хвиль визначаються як квадрати відповідних амплітудних величин:

$$R_p = r_p^2 = 0 \text{ и } R_s = r_s^2 = \frac{(n_{21}^2 - 1)^2}{(n_{21}^2 + 1)^2}.$$

Із знайдених виразів визначимо шуканий коефіцієнт відбиття світла:

$$R = \frac{R_p + R_s}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n_{21}^2 - 1)^2}{(n_{21}^2 + 1)^2}.$$

Задача 16. Плаский пучок природного світла з інтенсивністю I_0 падає під кутом Брюстера на поверхню скла. При цьому 0,139 світлового випромінювання відбивається. Знайти інтенсивність заломленої s -хвилі.

Розв'язок: Шукана інтенсивність визначиться:

$$I_0 T_s = I_0 (1 - R_s) = I_0 (1 - 2R) = (1 - 2 \cdot 0,139) I_0 = 0,722 \cdot I_0.$$

Задача 17. Показник заломлення сірковуглецю для світла з довжинами хвиль $\lambda_1 = 509 \text{ нм}$, $\lambda_2 = 534 \text{ нм}$, $\lambda_3 = 589 \text{ нм}$ дорівнює відповідно $n_1 = 1,647$, $n_2 = 1,640$, $n_3 = 1,630$. Обчислити фазову і групову швидкості світла поблизу $\lambda = 534 \text{ нм}$.

Розв'язок: Знайдемо шукану фазову швидкість світла в сірковуглецю поблизу $\lambda = 534 \text{ нм}$:

$$v_p = c/n = \frac{299792458}{1,640} = 1,828 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Групова швидкість світла в речовині визначається як:

$$v_g = v_p \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \right).$$

Врахувавши, що всі вхідні величини в наведеній формулі відносяться до середньої довжині хвилі, визначимо в лінійному наближенні шукану групову швидкість:

$$v_g = v_p \left(1 + \frac{\lambda}{n} \cdot \frac{n(\lambda_{\max}) - n(\lambda_{\min})}{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}} \right) = 1,828 \cdot 10^8 \cdot \left(1 + \frac{534}{1,640} \cdot \frac{1,630 - 1,647}{589 - 509} \right) = 1,702 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Розділ 8 Процеси поглинання в напівпровідниках і прилади на їх основі

Задача 1. Фотоопір виконано на основі власного Ge ($n_i = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$), площа фотоактивної зони $A = 1 \text{ см}^2$, товщина фотоактивної зони $d = 10 \text{ мкм}$ ($d \ll L_p$, $d \ll L_n$). Визначити залежність величини фотоопору від інтенсивності падаючого випромінювання, якщо надмірна концентрація $\Delta n = \alpha I_\Phi$.

Розв'язок: У загальному випадку, питома провідність фотоопору дорівнює сумі питомих провідностей без σ_0 і при (σ_I) наявності освітлення:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_I = q(\mu_n n + \mu_p p) + q(\mu_n \Delta n(r) + \mu_p \Delta p(r)) = q(\mu_n (n + \Delta n(r)) + \mu_p (p + \Delta p(r))),$$

де r – радіус-вектор розподілу генерованих світлом носіїв.

Виносячи μ_p за дужки і запровадивши позначення $b = \mu_n / \mu_p$, отримаємо:

$$\sigma = q\mu_p (b(n + \Delta n(r)) + (p + \Delta p(r))).$$

З огляду на те, що розглядається власний напівпровідник, отримаємо:

$$\sigma = \lim_{p \rightarrow n_i} \lim_{n \rightarrow n_i} q\mu_p (b(n + \Delta n(r)) + (p + \Delta p(r))) = q\mu_p (b(n_i + \Delta n(r)) + (n_i + \Delta p(r)))$$

і, врахувавши, що кожен поглинений фотон призводить до появи електронно-діркової пари, запишемо вираз:

$$\sigma = \lim_{\Delta n(r) \rightarrow \Delta p(r)} q\mu_p (b(n_i + \Delta n(r)) + (n_i + \Delta p(r))) = q\mu_p (b+1)(n_i + \Delta n(r)).$$

Оскільки, відповідно до умов завдання, товщина фотоактивної зони набагато менша дифузійних довжин електронів і дірок, то слід вважати концентрації генерованих електронно-діркових пар незалежною від обраної системи координат, тобто

$$\sigma = \lim_{\Delta n(r) \rightarrow \Delta n} q\mu_p (b+1)(n_i + \Delta n(r)) = q\mu_p (b+1)(n_i + \Delta n).$$

Тепер, знаючи величину питомої провідності фотоопору, легко визначити вид залежності цього опору від інтенсивності падаючого випромінювання:

$$R = \lim_{\Delta n \rightarrow \alpha I} l S^{-1} \sigma^{-1} = l S^{-1} (q\mu_p (b+1)(n_i + \alpha I))^{-1}.$$

Щоб зробити чисельні розрахунки необхідно задатися конструктивними параметрами фотоопору і при цьому можливі два варіанти контактів.

Випадок фронтальних контактів.

Необхідними умовами реалізації цього випадку буде наявність прозорих контактів, що покривають фотоактивну зону, і, отже, площа і довжина фотоопору будуть відповідно:

$$S = A = 1 \text{ см}^2 \text{ и } l = d = 10 \text{ мкм}.$$

Отже, шукана залежність величини фотоопору від інтенсивності падаючого випромінювання набуде вигляду:

$$R = \frac{10 \cdot 10^{-4}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1900 \cdot (3900/1900 + 1) \cdot (2,5 \cdot 10^{13} + \alpha I)} = \frac{1,761 \cdot 10^{12}}{2,5 \cdot 10^{13} + \alpha I},$$

при цьому величина темного опору буде дорівнює:

$$R_0 = \frac{1,761 \cdot 10^{12}}{2,5 \cdot 10^{13} + \alpha \cdot 0} = 4,3045 \cdot 10^{-2} \text{ Ом} = 43,045 \text{ мОм} \approx 43 \text{ мОм}.$$

Випадок латеральних контактів

Необхідними умовами реалізації цього випадку буде наявність будь-яких контактів, з протилежних сторін фотоактивної зони і поза нею. Вважаючи, що фотоактивна зона являє собою квадрат, визначимо площу і довжину фотоопору:

$$l = \sqrt{A} = 1 \text{ см} \text{ и } S = d \sqrt{A} = 10 \cdot 10^{-4} \sqrt{1} = 10^{-3} \text{ см}^2.$$

Отже, шукана залежність величини фотоопору від інтенсивності падаючого випромінювання набуде вигляду:

$$R = \frac{1}{10^{-3} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 1900 \cdot (3900/1900 + 1) \cdot (2,5 \cdot 10^{13} + \alpha I)} = \frac{1,761 \cdot 10^{18}}{2,5 \cdot 10^{13} + \alpha I},$$

при цьому величина темнового опору буде дорівнює:

$$R_0 = \frac{1,761 \cdot 10^{18}}{2,5 \cdot 10^{13} + \alpha \cdot 0} = 43045 \text{ Ом} = 43,045 \text{ кОм} \approx 43 \text{ кОм}.$$

Задача 2. Назвіть основні механізми поглинання світла в напівпровідниках. Які з механізмів є фотоактивні?

Відповідь: Всі основні механізми поглинання світла в напівпровідниках можна умовно розділити на дві групи: нефотоактивні і фотоактивні. До групи нефотоактивних механізмів відносять процеси, які пов'язані з рекомбінацією носіїв заряду в напівпровіднику при поглинанні фотона, наприклад, з поверхневою рекомбінацією. До групи фотоактивних механізмів відносять процеси, пов'язані з генерацією носіїв заряду і фононів в напівпровіднику при поглинанні фотона. У зв'язку з зазначеним, існує п'ять основних механізмів поглинання фотона в напівпровідниках: власне, екситоне, поглинання на вільних носіях заряду, домішкове і ґраткове.

Задача 3. Які причини зумовлюють нелінійну зміна фотопровідності напівпровідників в залежності від інтенсивності опромінення?

Відповідь: Причини нелінійної зміни фотопровідності в залежності від величини інтенсивності опромінення пов'язані, в першу чергу, з процесами релаксації фотопровідності, іншими словами, з процесами об'ємної рекомбінації генерованих носіїв заряду, в другу чергу, з явищем поверхневої рекомбінації. Всі зазначені причини призводять до наявності ділянки насичення на залежності фотопровідності від рівня освітлення.

Задача 4. Обчислити енергію фотонів для червоного випромінювання ($\lambda = 700 \text{ нм}$). Вкажіть, які напівпровідники прозорі для цього випромінювання, а які поглинають його.

Розв'язок: Визначимо фундаментальну зв'язок між довжиною хвилі фотона ($\lambda = c/v$) і енергією того ж фотона ($E = hv$):

$$\lambda = ch/E$$

або, якщо ставити енергію в електрон-вольтах, а довжину хвилі в мікрометрах

$$\lambda = ch/E = \frac{299792458 \cdot 6,6261 \cdot 10^{-34} \cdot 10^6}{E \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 1,239842/E.$$

З наведених даних, відразу слід шуканий відповідь

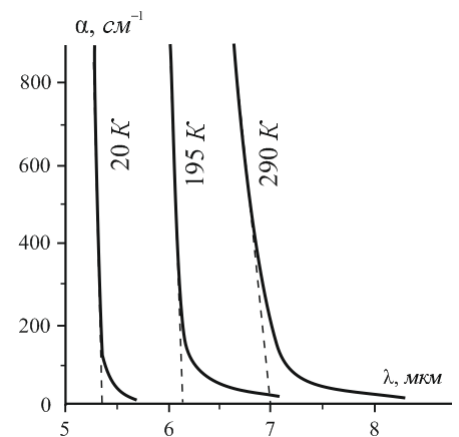
$$E = ch/\lambda = \frac{299792458 \cdot 6,6261 \cdot 10^{-34}}{700 \cdot 10^{-9} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 1,7712 \text{ эВ}.$$

Отриманий результат, дозволяє стверджувати, що напівпровідники з шириною забороненої зони більшої 1,7712 эВ, будуть прозорі для даної довжини хвилі, тоді як інші будуть не прозорі.

Задача 5. На рисунку показаний спектр власного поглинання антимоніду індію. На основі цих даних оцініть ширину забороненої зони напівпровідника при зазначених температурах.

Розв'язок: Побудувавши дотичні до кривих спектра власного поглинання антимоніду індію визначимо край власного поглинання: при $T = 20 \text{ K}$ – $\lambda_{20 \text{ K}} = 5,3 \text{ мкм}$, при $T = 195 \text{ K}$ – $\lambda_{195 \text{ K}} = 6,2 \text{ мкм}$, при $T = 290 \text{ K}$ – $\lambda_{290 \text{ K}} = 7,0 \text{ мкм}$. Цим значенням відповідає такому значенні ширини забороненої зони ($\Delta E_g = 1,239842/\lambda$): $\Delta E_{g(20 \text{ K})} = 0,2339 \text{ эВ}$, $\Delta E_{g(195 \text{ K})} = 0,2000 \text{ эВ}$, $\Delta E_{g(290 \text{ K})} = 0,1771 \text{ эВ}$.

Задача 6. Обчислити мінімальну довжину світлової хвилі, для якої арсеніду галію, що має ширину забороненої зони 1,43 эВ при температурі 300 K, є оптично прозорим. Як буде змінюватися ця гранична довжина хвилі зі зниженням температури?



Розв'язок: Шукана мінімальна довжина світлової хвилі збігається з краєм власного поглинання:

$$\lambda = 1,239842 / \Delta E_g = \frac{1,239842}{1,43} = 0,8670 \text{ мкм}.$$

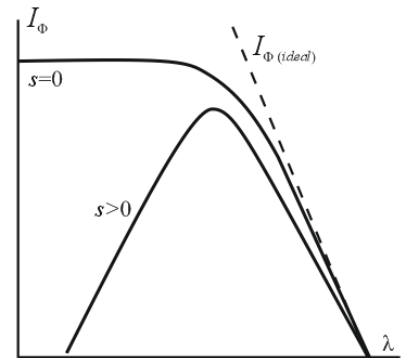
Зі зниженням температури ця величина буде зменшуватися відповідно до закону зміни ширини забороненої зони арсеніду галію.

Задача 7. Скориставшись довідковими даними, визначити порогову довжину хвилі власного поглинання Si, Ge, GaAs, InP.

Розв'язок: Шукані порогові довжини хвиль складуть ($\lambda = 1,239842 / \Delta E_g$): $\lambda_{Si} = 1,1070 \text{ мкм}$, $\lambda_{Ge} = 1,8644 \text{ мкм}$, $\lambda_{InSb} = 6,8880 \text{ мкм}$, $\lambda_{GaAs} = 0,8670 \text{ мкм}$.

Задача 8. Зобразити (якісно) спектральні характеристики власної фотопровідності напівпровідника при двох різних швидкостях поверхневої рекомбінації.

Відповідь: Шукані залежності представлені на рисунку, де $I_{\Phi (ideal)}$ – залежність фотоструму ідеального фотоопору, $s = 0$ – залежність фотоструму фотоопору у якого відсутня поверхнева рекомбінація, $s > 0$ – залежність фотоструму реального фотоопору, тобто з відмінною від нуля величиною швидкості поверхневої рекомбінації.



Задача 9. В якому з напівпровідникових матеріалів найбільша власна фотопровідність при найбільшій довжині хвилі падаючого на напівпровідник випромінювання: Ge, Si, InSb, GaAs?

Відповідь: Згідно залежності краю поглинання від ширини забороненої зони ($\lambda = 1,239842 / \Delta E_g$) найбільша довжина хвилі відповідає напівпровіднику з найменшою шириною забороненої зони, тобто InSb із заданого переліку.

Задача 10. Довгохвильової кордоні зовнішнього фотоэффекту сур'яно-цезієвого фотокатода при температурі поблизу абсолютного нуля відповідає довжина хвилі $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$, а поріг фотопровідності в цьому матеріалі спостерігається при $\lambda = 2,07 \text{ мкм}$. Визначити положення дна зони провідності даного напівпровідника щодо енергетичного рівня вакууму.

Розв'язок: Визначимо роботу виходу як:

$$E_1 = 1,239842 / \lambda = \frac{1,239842}{2,07} = 0,59896 \text{ eV}.$$

Ширину забороненої зони визначимо по краю (порогу) фотопровідності:

$$E_2 = 1,239842 / \lambda = \frac{1,239842}{0,65} = 1,90745 \text{ eV}.$$

Тоді шукане положення запишемо:

$$E_C = E_2 - E_1 = 1,90745 - 0,59896 = 1,30849 \text{ eV} \approx 1,31 \text{ eV}.$$

Задача 11. Довгохвильової границі фотопровідності власного напівпровідника відповідає $\lambda = 1,86 \text{ мкм}$. Обчислити температурний коефіцієнт питомого опору матеріалу для $T = 300 \text{ K}$.

Розв'язок: Ширина забороненої зони даного напівпровідника визначиться за формулою:

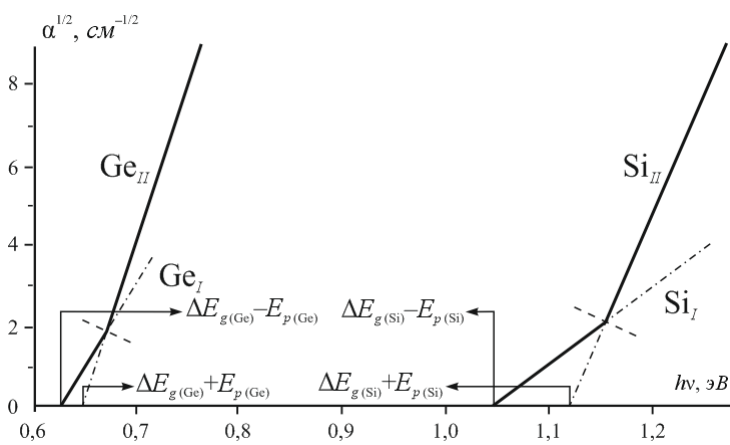
$$\Delta E_g = 1,239842 / \lambda = \frac{1,239842}{1,86} = 0,66658 \text{ eV},$$

отже, розглядається германій, ширина забороненої зони якого при температурі абсолютного нуля дорівнює $\Delta E_{g0} = 0,76858 \text{ eV}$. Визначимо шуканий коефіцієнт зміни ширини забороненої зони германію:

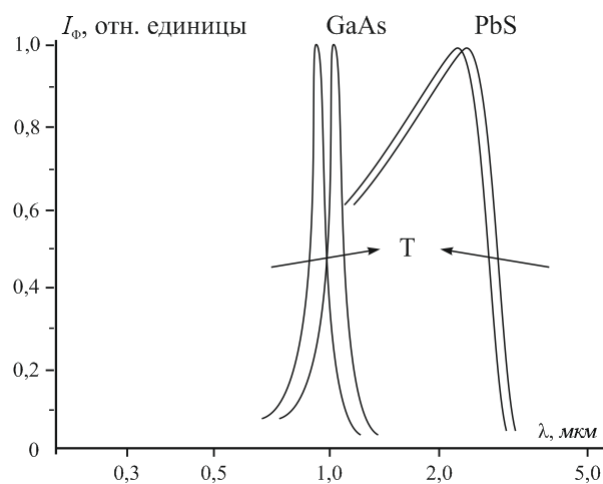
$$b = (\Delta E_{g0} - \Delta E_g) / \Delta T = \frac{0,76858 - 0,66658}{300} = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ eV / K}.$$

Задача 12. Зобразити на одному рисунку спектральні характеристики власної фотопровідності для кремнію і германію. Поясніть відмінності в положенні кривих.

Відповідь: Спектри поглинання кремнію і германію схожі, а саме, у обох присутній дві лінійних ділянки в координатах $\alpha^{1/2}(h\nu)$. Перша ділянка (Ge_I , Si_I) обумовлена явищами, пов'язаними з поглинанням фонона, а друга (Ge_{II} , Si_{II}) – з випромінюванням фонона. Точки перетину з віссю абсцис першої ділянки кривих: $\Delta E_g(Ge) - E_p(Ge)$ і $\Delta E_g(Si) - E_p(Si)$, де $\Delta E_g(Ge)$ і $\Delta E_g(Si)$ – ширина забороненої зони германію та кремнію відповідно, $E_p(Ge)$ і $E_p(Si)$ – сумарна енергія фононів в германії і кремнії відповідно. Точки перетину з віссю абсцис другої ділянки кривих: $\Delta E_g(Ge) + E_p(Ge)$ і $\Delta E_g(Si) + E_p(Si)$. Таким чином, отримуємо ознака визначення ширини забороненої зони матеріалу - посеред першої ділянки. І цим же, пояснюється відмінність в положенні кривих.



Задача 13. Зобразити спектральні характеристики власної фотопровідності арсеніду галію і сульфїду свинцю при двох різних температурах. Пояснить якісні відмінності в температурному зміні фотоелектричних властивостей цих матеріалів.



Відповідь: Шукані залежності представлені на рисунку. З наведених графіків видно, що максимум поглинання арсенїду галію з ростом температури зсувається в бік менших енергій, тобто великих довжин хвиль, тоді як максимум поглинання сульфїду свинцю із зростанням температури зсувається в бік більших енергій, тобто менших довжин хвиль. Останнє пояснюється неоднаковою залежністю ширини забороненої зони від температури, так в арсенїді галію ширина забороненої зони зменшується з ростом температури, а в сульфїді свинцю - збільшується. В силу останнього, з ростом температури максимум поглинання арсенїду галію зміщується в бік менших енергій, а в сульфїді свинцю - в сторону великих.

Задача 14. Яка повинна бути ширина забороненої зони напівпровідникового матеріалу, щоб довжина хвилі рекомбінаційного випромінювання припадала на видиму область спектра?

Розв'язок: Як відомо, видимий спектр доводиться на діапазон довжин хвиль 380-740 нм. Отже, ширина забороненої зони ($\Delta E_g = 1,239842/\lambda$) напівпровідника для видимої області спектра повинна знаходитися в межах

$$1,675 \text{ eV} \leq \Delta E_g \leq 3,263 \text{ eV}.$$

Задача 15. Відомо, що в фоторезисторах з власного сульфїду кадмію фотострум створюється головним чином, електронами. Доведіть, що відношення числа електронів, що проходять у зовнішньому колі під дією зовнішнього поля, до числа носіїв заряду, збуджених світлом в напівпровіднику, визначається виразом $g = \tau_n/t$, де τ_n – час життя електронів, t – час їх дрейфу між електродами.

Доказ: Розглянемо фотострум у фоторезисторі на основі власного сульфїду кадмію:

$$j_\Phi = q(\mu_n(n + \Delta n) + \mu_p(p_i + \Delta p))E.$$

Нехтуючи темною складовою, отримуємо:

$$\lim_{\Delta n/n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\mu_n/\mu_p \rightarrow \infty} j_\Phi \right) = q\mu_n \Delta n E = q\Delta n v_n = q(n + \Delta n)l/t = q(n + g\tau_n)l/t,$$

де v_n – дрейфова швидкість генерованих електронів. Останню величину можна визначити через довжину зразка l і час прольоту t :

$$v_n = l/t.$$

У свою чергу величину надлишкових носіїв можна визначити за допомогою швидкості їх генерації g_n і часу життя τ_n :

$$\Delta n = g_n \tau_n.$$

Врахувавши викладене вище, отримаємо:

$$j_\Phi = q\Delta n l/t = qg_n l \tau_n / t,$$

тобто величина фотоструму прямо пропорційна числу носіїв заряду, збуджених світлом в напівпровіднику $Q_n = qg_n l \tau_n$ і обернено пропорційна часу дрейфу t , що й потрібно було довести.

Задача 16. *Визначити максимальну ширину забороненої зони, яку може мати напівпровідник, який використовується в якості фотодетектора, якщо він повинен бути чутливим до випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 565$ нм.*

Розв'язок: Шукана ширина забороненої зони даного напівпровідника визначиться як:

$$\Delta E_g = 1,239842/\lambda = \frac{1,239842}{0,565} = 2,1944 \text{ eV}.$$

Задача 17. *На напівпровідниковий детектор площею $A = 0,5$ мм² падає потік монохроматичного випромінювання ($\lambda = 565$ мкм) щільністю $p = 20$ мВт/м². Визначити, число електронно-діркових пар, щосекунди генеруються в об'ємі напівпровідника, вважаючи, що кожен фотон створює лише одну пару носіїв заряду. Визначити у скільки разів зміниться швидкість генерації, якщо щільність потоку випромінювання зменшиться в два рази. Визначити, як зміниться швидкість оптичної генерації, якщо довжина хвилі λ зменшиться вдвічі.*

Розв'язок: По-перше, потужність світлового потоку визначимо як:

$$P = pA = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 10^{-8} \text{ Вт}.$$

Енергію одного фотона запишемо як:

$$E = hc/\lambda = \frac{6,6261 \cdot 10^{-34} \cdot 299792458}{565 \cdot 10^{-6}} = 3,5158 \cdot 10^{-22} \text{ Дж} = 2,1944 \cdot 10^{-3} \text{ eV}.$$

Отже, шукане число електронно-діркових пар, яке генерується дорівнюватиме:

$$k = P/E = \frac{10^{-8}}{3,5158 \cdot 10^{-22}} = 2,844 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}.$$

По-друге, оскільки швидкість генерації прямо пропорційна щільності потоку випромінювання, то при її зменшенні в два рази слід очікувати зменшення швидкості генерації в таке ж число раз.

По-третє, оскільки швидкість генерації прямо пропорційна числу фотонів, що поглинаються, і прямо не залежить від їх енергії, то слід очікувати незмінності швидкості генерації при зміні довжини хвилі фотона (наприклад, при її зменшенні вдвічі).

Задача 18. *Зразок з чистого бездомішкового германію, у якого ширина забороненої зони становить $0,665$ eV, а $\mu_n = 3900$ см²/(В·с) та $\mu_p = 1900$ см²/(В·с) знаходиться при $T = 300$ К в поле електромагнітного випромінювання. При цьому його питомий опір $\rho = 43$ Ом·см. Визначити, яка частка електропровідності зразка обумовлена фотопровідністю.*

Розв'язок: Згідно з довідковими даними концентрація власних носіїв заряду в германії дорівнює $n_i = 2,1 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$, і, отже, величина темного питомого опору буде дорівнює:

$$\rho_i = \frac{1}{qn_i(\mu_n + \mu_p)} = \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 2,1 \cdot 10^{19} \cdot (0,39 + 0,19)} \approx 0,5 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Шукану частку електропровідності, яка обумовлена фотопровідністю, визначимо як:

$$\frac{\sigma - \sigma_i}{\sigma} = 1 - \frac{\sigma_i}{\sigma} = 1 - \frac{\rho}{\rho_i} = 1 - \frac{0,43}{0,5} \approx 0,14.$$

Задача 19. *Визначити коефіцієнт посилення фотопору, якщо відомо, що час життя матеріалу фотопору $\tau_n = 10$ мкс, рухливість носіїв $\mu_n = 7000$ см² / (В·с), довжина фотопору 1 мм, прикладена до фотопору напруга становить 10 В.*

Розв'язок: Коефіцієнт посилення по напрузі фотопору, як відомо, визначається за допомогою відношення часу життя неосновних носіїв заряду (τ) до часу прольоту через фотопір (t):

$$K_U = \tau/t = \tau_n/t.$$

Останню величину легко визначити по довжині зразка (l) і дрейфовій швидкості носіїв заряду (v) $t = l/v$, причому саму дрейфову швидкість можна визначити через напруженість електричного поля в зразку (E) $v = \mu_n E$, яка, в свою чергу, визначається зовнішньою різницею потенціалів (U) $E = U/l$. Врахувавши все вище перераховане, отримаємо шуканий коефіцієнт посилення по напрузі в такому вигляді:

$$K_U = \tau_n \mu_n U l^{-2} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 0,7 \cdot 10^4 / (1 \cdot 10^{-3})^2 = 70.$$

Задача 20. *У фотодіоді висвітлюється тонка р-область товщиною $d = 10$ мкм. Визначити темновий і світловий струми фотодіода, якщо концентрація носіїв у поверхні р-області, створювана світлом, $\Delta n_0 = 10^{15}$ см⁻³ і швидкість поверхневої рекомбінації – $s = 10^3$ см/с.*

Параметри р- і n-областей $p_n = 10^{12}$ см⁻³, $D_p = 50$ см² / с, $L_p = 100$ мкм, $n_p = 10^{14}$ см⁻³, $D_n = 100$ см² / с, $L_n = 200$ мкм, напруга на діоді $U = -5$ В, площа фотодіода $A = 10^{-2}$ см².

Розв'язок: Загальний струм фотодіода ($I_{\Sigma\Phi}$) складається з двох компонент, а саме, залежить від зовнішньої напруги, темноті складової ($I_{\Phi 0}$) і світлової складової (I_{Φ}):

$$I_{\Sigma\Phi} = I_{\Phi 0} + I_{\Phi},$$

причому

$$I_{\Phi 0} = Aq \left(\frac{D_p p_n}{L_p} + \frac{sn_p}{1 + ds/D_n} \right) \cdot \left(e^{\frac{qU}{k_B T}} - 1 \right) = I_{\Phi sat 0} \left(e^{\frac{qU}{k_B T}} - 1 \right),$$

$$I_{\Phi} = -Aq \frac{j_{\Phi}}{1 + ds/D_n},$$

де $j_{\Phi} = s \Delta n_0$ – інтенсивність поверхневої генерації електронно-діркових пар.

Підставляючи вихідні дані, отримаємо шукані величини струмів:

$$I_{\Phi 0} = 10^{-2} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \left(\frac{50 \cdot 10^{12}}{100 \cdot 10^{-4}} + \frac{10^3 \cdot 10^{14}}{1 + 10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 / 100} \right) \cdot \left(\exp \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (-5)}{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300} - 1 \right) = -1,666 \cdot 10^{-4} \text{ А} \approx -0,17 \text{ мА},$$

$$I_{\Phi} = -10^{-2} \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{10^3 \cdot 10^{15}}{1 + 10 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3 / 100} = -1,586 \cdot 10^{-3} \text{ А} \approx -1,6 \text{ мА}.$$

Задача 21. *Визначити середньоквадратичну потужність падаючого випромінювання, якщо гранична детектуюча властивість фотопору на основі Si становить $D^* = 4 \cdot 10^{13}$ см·Гц^{1/2} / Вт, площа фотопору $A = 10^{-4}$ см², температура ґратки становить 300 К.*

Розв'язок: За визначенням, детектуюча властивість фотопору дорівнює:

$$D^* = \sqrt{A \Delta f} / NEP,$$

де Δf – смуга частот, яка зазвичай покладається рівною смузі частот $\Delta f = 1$ Гц, NEP – потужність еквівалентна шуму. Остання ж величина, визначається як середньоквадратична

потужність падаючого випромінювання $P = NEP$ при якій відношення сигнал / шум дорівнює одиниці. Отже, вираз для детектуючої властивості фотоопору можна переписати в такому вигляді:

$$D^* = \sqrt{A\Delta f} / P.$$

Тоді визначимо шукану середньоквадратичну потужність падаючого випромінювання:

$$P = \sqrt{A\Delta f} / D^* = \frac{\sqrt{10^{-4} \cdot 1}}{4 \cdot 10^{13}} = 2,5 \cdot 10^{-16} \text{ Вт} = 0,25 \text{ фВт}.$$

Задача 22. Якою має бути середньоквадратична потужність випромінювання, якщо гранична детектуюча властивість фотоопору на основі CdHgTe при 77 К становить $D^* = 2 \cdot 10^{10} \text{ см} \cdot \text{Гц}^{1/2} / \text{Вт}$, площа фотоопору $A = 10^{-4} \text{ см}^2$.

Розв'язок: Визначимо потрібну середньоквадратичну потужність падаючого випромінювання:

$$P = \sqrt{A\Delta f} / D^* = \frac{\sqrt{10^{-4} \cdot 1}}{2 \cdot 10^{10}} = 5 \cdot 10^{-13} \text{ Вт} = 0,5 \text{ пВт}.$$

Задача 23. Обчислити напруженість електричного поля ефекту Дембера освітленого шару в германієвих зразку *n*-типу, якщо генерація електронно-діркових пар здійснюється в тонкому приповерхневому шарі з інтенсивністю $j_\Phi = 10^{15} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Час життя нерівноважних носіїв заряду в об'ємі $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$, швидкість поверхневої рекомбінації $S = 100 \text{ см} / \text{с}$, $D_p = 49 \text{ см}^2 / \text{с}$, $b = \mu_n / \mu_p = 2,1$, $n_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $n_i = 2,1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T = 300 \text{ К}$.

Розв'язок: Вважаючи, що напруженість електричного поля в ефекті Дембера створюється тільки ЕРС-Дембера (U_D) і є однорідною по товщині освітленого шару (L_Φ), отримуємо таке визначення шуканої напруженості:

$$E_D = U_D / L_\Phi.$$

Товщина освітленого шару визначається як потроєна довжина дифузійної довжини неосновних носіїв заряду, тобто за даних умов як:

$$L_\Phi = 3L_p = 3\sqrt{D_p \tau_p} = 3\sqrt{49 \cdot 10^{-4}} = 0,21 \text{ см} = 2,1 \text{ мм}.$$

До числового розрахунку ЕРС-Дембера за формулою

$$U_D = \frac{k_B T}{q} \cdot \frac{b-1}{b+1} \cdot \ln \left(1 + \frac{(b+1)\Delta n_0}{bn_0 + p_0} \right)$$

необхідно визначити проміжні величини, а саме, рівноважну концентрацію дірок і концентрацію пар носіїв, що створюються на поверхні освітлюваного напівпровідника:

$$p_0 = n_i^2 / n_0 = \frac{(2,1 \cdot 10^{13})^2}{5 \cdot 10^{14}} = 8,82 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3},$$

$$\Delta n_0 = j_\Phi / s = \frac{10^{15}}{10^2} = 10^{13} \text{ см}^{-3}.$$

Підставивши отримані величини і інші вихідні дані, визначимо ЕРС-Дембера:

$$U_D = \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot (2,1-1)}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot (2,1+1)} \cdot \ln \left(1 + \frac{(2,1+1) \cdot 10^{13}}{2,1 \cdot 5 \cdot 10^{14} + 8,82 \cdot 10^{11}} \right) = 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 0,267 \text{ мВ}.$$

Отже, шукана напруженість електричного поля ефекту Дембера освітленого шару в германієвих зразку *n*-типу визначиться як:

$$E_D = U_D / L_\Phi = \frac{0,267}{0,21} = 1,27 \text{ мВ} / \text{см}.$$

Задача 24. Знайти різницю потенціалів, що виникає при ефекті Дембера в зразку германію *n*-типу, визначити товщину освітленої області. Інтенсивність поверхневої генерації електронно-діркових пар становить $j_\Phi = 10^{15} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Час життя нерівноважних носіїв заряду в об'ємі $\tau_p = 10^{-4} \text{ с}$, швидкість поверхневої рекомбінації $S = 100 \text{ см} / \text{с}$, $D_p = 49 \text{ см}^2 / \text{с}$, $b = \mu_n / \mu_p = 2,1$, $n_0 = 5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $n_i = 2,1 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T = 300 \text{ К}$.

Розв'язок: Вирішуючи завдання за аналогією з попередньою визначимо шукані величини:

$$L_\Phi = 0,21 \text{ см} = 2,1 \text{ мм} \text{ и } U_D = 2,67 \cdot 10^{-4} \text{ В} = 0,267 \text{ мВ}.$$

Задача 25. Для зразка напівпровідника, що має форму куба зі стороною l , вимірний опір під час відсутності освітлення дорівнює R_0 , а при освітленні – R_l . Знайти концентрацію електронів Δn і дірок Δp , обумовленим освітленням, якщо рухливість електронів і дірок відповідно μ_n і μ_p . Вважати, що $\Delta n = \Delta p$.

Розв'язок: Вважаючи, що зразок має форму правильного паралелепіпеда довжиною l і площею поперечного перерізу S визначимо задані величини опорів за формулами:

$$R_0 = \frac{l\rho_0}{S} = \frac{l}{S\sigma_0} \text{ и } R_l = \frac{l\rho_l}{S} = \frac{l}{S\sigma_l} = \frac{l}{S(\sigma_0 + \Delta\sigma_l)},$$

де $\Delta\sigma_l = \lim_{\Delta n \rightarrow \Delta p} q(\mu_n \Delta n + \mu_p \Delta p) = q\Delta n(\mu_n + \mu_p)$ – величина фотопровідності.

Віднімаючи від отопровідності величину темної провідності, отримаємо рівняння:

$$R_l^{-1} - R_0^{-1} = \frac{R_0 - R_l}{R_0 R_l} = \frac{q\Delta n}{l} S(\mu_n + \mu_p).$$

Тоді визначимо шукану концентрацію електронно-діркових пар, які генеруються світлом, тобто концентрацію нерівноважних носіїв заряду:

$$\Delta n = \frac{R_0 - R_l}{R_0 R_l} \cdot \frac{l}{qS(\mu_n + \mu_p)},$$

і, в разі кубічної форми зразка:

$$\Delta n = \lim_{s \rightarrow l^2} \Delta n = \frac{R_0 - R_l}{ql(\mu_n + \mu_p)R_0 R_l}.$$

Розділ 9 Процеси випромінювання з напівпровідників

Задача 1. Визначити частоту та енергію фотона для кожного з нижчеперелічених джерел оптичного випромінювання: гелій-неоновий лазер при $\lambda = 0,6328$ мкм, лазер на неодимі при $\lambda = 1,059$ мкм, лазер на вуглекислому газі при $\lambda = 10,6$ мкм.

Розв'язок: Частота випромінювання визначається як $\nu = c/\lambda$, і, відповідно енергія фотона на цій частоті буде рівною:

$$E = h\nu = hc/\lambda = \frac{299792458 \cdot 6,6261 \cdot 10^{-34}}{\lambda} = \frac{1,98645 \cdot 10^{-25}}{\lambda} \text{ Дж} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{\lambda} \text{ эВ}.$$

Підставляючи числові дані, визначимо шукані величини:

$$\nu_{\lambda=0,6328 \text{ мкм}} = \frac{299792458}{0,6328 \cdot 10^{-6}} = 4,737 \cdot 10^{14} \text{ Гц} \text{ и } E_{\lambda=0,6328 \text{ мкм}} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{0,6328 \cdot 10^{-6}} = 1,959 \text{ эВ},$$

$$\nu_{\lambda=1,059 \text{ мкм}} = \frac{299792458}{1,059 \cdot 10^{-6}} = 2,831 \cdot 10^{14} \text{ Гц} \text{ и } E_{\lambda=1,059 \text{ мкм}} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{1,059 \cdot 10^{-6}} = 1,171 \text{ эВ},$$

$$\nu_{\lambda=10,6 \text{ мкм}} = \frac{299792458}{10,6 \cdot 10^{-6}} = 2,828 \cdot 10^{13} \text{ Гц} \text{ и } E_{\lambda=10,6 \text{ мкм}} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{10,6 \cdot 10^{-6}} = 2,828 \text{ эВ}.$$

Задача 2. Визначити склад потрібної сполуки $GaAs_{1-x}P_x$ необхідні для створення світлодіодів з жовтим ($\lambda = 610$ нм), помаранчевий ($\lambda = 650$ нм), червоним ($\lambda = 690$ нм) світінням. Покласти, що ширина забороненої зони сполук змінюється лінійно від 1,45 эВ ($GaAs$) до 2,3 эВ (GaP).

Розв'язок: Діапазон зміни ширини забороненої зони потрібного з'єднання визначається як:

$$\Delta E_g = \Delta E_{g1} - \Delta E_{g2},$$

де ΔE_{g1} – ширина забороненої зони широкозонної компоненти, ΔE_{g2} – ширина забороненої зони вузькозонних компоненти.

Для отримання випромінювання з довжиною хвилі λ , тобто з енергією фотона

$$E = h\nu = hc/\lambda = \frac{299792458 \cdot 6,6261 \cdot 10^{-34}}{\lambda} = \frac{1,98645 \cdot 10^{-25}}{\lambda} \text{ Дж} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{\lambda} \text{ эВ},$$

потрібно збільшити ширину забороненої зони потрійного з'єднання по відношенню до вузькозонних компоненті на величину:

$$\delta E = E - \Delta E_{g2}.$$

Шукана частка широкозонної компоненти потрійного з'єднання визначиться як:

$$x = \frac{\delta E}{\Delta E_g} = \frac{E - \Delta E_{g2}}{\Delta E_{g1} - \Delta E_{g2}}.$$

Підставляючи вихідні дані, визначимо шукані величини, а саме, енергії фотонів:

$$E_{\lambda=610 \text{ нм}} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{610 \cdot 10^{-9}} = 2,033 \text{ эВ},$$

$$E_{\lambda=650 \text{ нм}} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{650 \cdot 10^{-9}} = 1,907 \text{ эВ},$$

$$E_{\lambda=690 \text{ нм}} = \frac{1,239842 \cdot 10^{-6}}{690 \cdot 10^{-9}} = 1,797 \text{ эВ},$$

і частку широкозонної компоненти потрійного з'єднання:

$$E_{\lambda=610 \text{ нм}} = \frac{2,033 - 1,45}{2,3 - 1,45} = 0,685 \approx 0,69,$$

$$E_{\lambda=650 \text{ нм}} = \frac{1,907 - 1,45}{2,3 - 1,45} = 0,538 \approx 0,54,$$

$$E_{\lambda=690 \text{ нм}} = \frac{1,797 - 1,45}{2,3 - 1,45} = 0,408 \approx 0,41.$$

Отже, шукані склади потрійних сполук запишуться так $GaAs_{0,31}P_{0,69}$, $GaAs_{0,46}P_{0,54}$ і $GaAs_{0,59}P_{0,41}$.

Задача 3. Знайти відстань, на якому оптична потужність пучка зменшується в $n = 10$ разів при поширенні в волокнах, що мають такі коефіцієнти втрат 2000 дБ/км, 20 дБ/км і 0,2 дБ/км.

Розв'язок: Перш за все, запишемо коефіцієнт α в одиницях $[Б/м]$ і $[м^{-1}]$:

$$\alpha_{Б/м} = 0,1 \cdot \alpha_{дБ/км} / 1000 = 10^{-4} \cdot \alpha_{дБ/км}, \text{ и } \alpha = \ln 10 \cdot \alpha_{Б/м} = \ln 10 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha_{дБ/км}.$$

Із закону згасання оптичної потужності (P) в залежності від довжини лінії (L): $P = P_0 e^{-\alpha L}$, де P_0 – оптична потужність на вході лінії, запишемо рівняння:

$$1/n = P/P_0 = e^{-\alpha L},$$

розв'язуючи яке отримаємо:

$$L = \ln n / \alpha = \ln 10 / \alpha = \frac{\ln 10}{\ln 10 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha_{дБ/км}} = \frac{10^4}{\alpha_{дБ/км}}.$$

Підставляючи вихідні дані, визначимо шукані величини:

$$L_{\alpha=2000 \text{ дБ/км}} = 10^4 / 2000 = 5 \text{ м},$$

$$L_{\alpha=200 \text{ дБ/км}} = 10^4 / 200 = 500 \text{ м},$$

$$L_{\alpha=0,2 \text{ дБ/км}} = 10^4 / 0,2 = 50000 \text{ м} = 50 \text{ км}.$$

Задача 4. Ослаблення оптичної потужності $P(x)$ при проходженні відстані x можна виразити через коефіцієнт поглинання α за допомогою формули $P(x) = P_0 e^{-\alpha x}$. Знайти співвідношення між α , вираженим в $[м^{-1}]$, і коефіцієнтом поглинання, вираженим в $[дБ/км]$. Виходячи з цього, обчислити значення для трьох типів скла з попередньої задачі.

Вказівка: Скористатися результатом попередньої задачі.

Розв'язок: Шукане співвідношення має вигляд:

$$\alpha = \ln 10 \cdot \alpha_{Б/м} = \ln 10 \cdot 10^{-4} \cdot \alpha_{дБ/км}$$

і, отже, шукані величини визначаються як:

$$\alpha_1 = \ln 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2000 \approx 0,4605 \text{ м}^{-1},$$

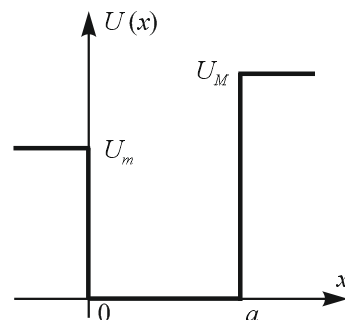
$$\alpha_2 = \ln 10 \cdot 10^{-4} \cdot 20 \approx 4,605 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1},$$

$$\alpha_3 = \ln 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2 \approx 4,605 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}.$$

Розділ 10 Квантово-розмірні ефекти і прилади, надгратки

Задача 1. Визначити енергетичний спектр електрона в прямокутному квантовому ямі з шириною $a = 3 \text{ нм}$ і висотами бар'єрів $U_m = 0,2 \text{ эВ}$ і $U_M = 0,7 \text{ эВ}$. Прийняти масу електрона рівною $m^* = 0,10 \cdot m_0$, де m_0 – маса вільного електрона.

Теорія: Визначимо енергетичний спектр частинки, що знаходиться в несиметричній прямокутній одновимірній потенційній ямі. Покладемо, що дно даної ями простягається уздовж осі x від координати 0 до координати a . Енергію частки будемо відраховувати від дна квантової ями і позначати через E , а висоту меншого і більшого потенційних бар'єрів квантової ями – через U_m і U_M , відповідно. Залежність потенційної енергії частинки $U(x)$ поза квантової ями будемо вважати постійною і рівною відповідній висоті потенційного бар'єру, тобто при $x < 0$ і $x > a$, отримаємо відповідно $U(x)|_{x < 0} = U_m$ і $U(x)|_{x > a} = U_M$ (див. рис.).



Стационарне рівняння Шредінгера в розглянутому одновимірному випадку є звичайним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} - (U(x) - E)\psi = 0,$$

де m^* – ефективна маса частинки. Перепишемо рівняння Шредінгера в такому вигляді:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m^*(U(x) - E)}{\hbar^2}\psi = 0.$$

Розглядаючи поведінку хвильової функції поза і всередині квантової ями, отримаємо відповідні рівняння Шредінгера для кожної з розглянутих областей:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m^*(U_m - E)}{\hbar^2}\psi = 0 \text{ при } x < 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m^*E}{\hbar^2}\psi = 0 \text{ при } 0 < x < a,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m^*(U_M - E)}{\hbar^2}\psi = 0 \text{ при } x > a.$$

Вводячи позначення $k_m^2 = \frac{2m^*(U_m - E)}{\hbar^2}$, $k_a^2 = \frac{2m^*E}{\hbar^2}$, $k_M^2 = \frac{2m^*(U_M - E)}{\hbar^2}$ і вважаючи, що вони

являють собою дійсні значення хвильових чисел частинки в відповідних областях, перетворимо рівняння Шредінгера :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k_m^2\psi = 0 \text{ при } x < 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k_a^2\psi = 0 \text{ при } 0 < x < a,$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k_M^2\psi = 0 \text{ при } x > a.$$

Рішення цих рівнянь можна представити в такому вигляді:

$$\psi = A_1 e^{k_m x} + A_2 e^{-k_m x} \text{ при } x < 0,$$

$$\psi = B_1 \sin k_a x + B_2 \cos k_a x = B \sin(k_a x + \delta) \text{ при } 0 < x < a,$$

$$\psi = C_1 e^{-k_M x} + C_2 e^{k_M x} \text{ при } x > a,$$

де $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ – постійні коефіцієнти, які визначаються з граничних умов, причому $B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ і $\delta = \arctan(B_2/B_1)$.

З вимоги кінцівки хвильової функції, тобто, рівності її нулю на нескінченності, отримаємо

$$\psi = \lim_{x \rightarrow -\infty} (A_1 e^{k_m x} + A_2 e^{-k_m x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (A_2 e^{-k_m x}) = 0 \text{ и } \psi = \lim_{x \rightarrow +\infty} (C_2 e^{k_M x}) = 0.$$

Зазначені умови виконуються в разі рівності нулю відповідних коефіцієнтів. Інакше кажучи, отримуємо, що $A_2 = 0, C_2 = 0$ і, отже, розглядаються рішення:

$$\psi = A_1 e^{k_m x} + 0 \cdot e^{-k_m x} = A e^{k_m x} \text{ при } x < 0,$$

$$\psi = B \sin(k_a x + \delta) \text{ при } 0 < x < a,$$

$$\psi = C_1 e^{-k_M x} + 0 \cdot e^{k_M x} = C e^{-k_M x} \text{ при } x > a,$$

де введені позначення $A = A_1$ і $C = C_1$.

Попередньо визначимо похідні отриманих хвиль:

$$\psi' = d(A_1 e^{k_m x})/dx = A k_m e^{k_m x} \text{ при } x < 0,$$

$$\psi' = d(B \sin(k_a x + \delta))/dx = B k_a \cos(k_a x + \delta) \text{ при } 0 < x < a,$$

$$\psi' = d(C_1 e^{-k_M x})/dx = -C k_M e^{-k_M x} \text{ при } x > a.$$

З вимоги неперервності хвильової функції, тобто, рівності отриманих хвильових функцій

$$\psi|_{x=0} = A = B \sin \delta, \quad \psi|_{x=a} = C e^{-k_M a} = B \sin(k_a a + \delta)$$

і їх похідних отримаємо:

$$\psi'|_{x=0} = A k_m = B k_a \cos \delta, \quad \psi'|_{x=a} = -C k_M e^{-k_M a} = B k_a \cos(k_a a + \delta).$$

Зазначені вимоги можна об'єднати в одну вимогу, а саме, вимога неперервності логарифмічної похідної:

$$\left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} \right) \Big|_{x=0} = \frac{A k_m}{A} = \frac{B k_a \cos \delta}{B \sin \delta} \text{ або } \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} \right) \Big|_{x=0} = \frac{k_m}{k_a} = \cot \delta,$$

$$\left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} \right) \Big|_{x=a} = \frac{-C k_M e^{-k_M a}}{C e^{-k_M a}} = \frac{B k_a \cos(k_a a + \delta)}{B \sin(k_a a + \delta)} \text{ або } \left(\frac{1}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} \right) \Big|_{x=a} = -\frac{k_M}{k_a} = \cot(k_a a + \delta).$$

З отриманих виразів, слід, що

$$\delta = \pi n_1 + \operatorname{arccot}(k_m/k_a),$$

$$k_a a + \delta = \pi n_2 + \operatorname{arccot}(-k_M/k_a) = \pi n_2 - \operatorname{arccot}(k_M/k_a),$$

де $n_1 > 0$ і $n_2 > 0$ – будь-які позитивні цілі числа.

Віднімаючи від другого виразу найперше, прийдемо до виразу:

$$k_a a = \pi(n_2 - n_1) - \operatorname{arccot}(k_M/k_a) - \operatorname{arccot}(k_m/k_a).$$

Оскільки, хвильове число (k_a) має бути позитивним, то ліва частина отриманого рівняння також завжди позитивна. Останнє можливе лише тоді, коли $(n_2 - n_1) > 0$, причому $n = n_2 - n_1$, в силу того, що і n_1 , і n_2 – цілі позитивні числа, також позитивне ціле число. З іншого боку, функція арккотангенса однозначно визначається через функцію арксинуса

$$\operatorname{arccot} X = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+X^2}},$$

при виконанні вимоги, що $\arcsin(1+X^2)^{-1/2} \in (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$. В умовах даної задачі, остання вимога набуде вигляду $\arcsin(1+X^2)^{-1/2} \in (0; +\frac{\pi}{2})$.

Врахувавши все вище сказане, перетворимо отриманий вище вираз:

$$k_a a = \pi n - \arcsin \frac{k_a}{\sqrt{k_a^2 + k_m^2}} - \arcsin \frac{k_a}{\sqrt{k_a^2 + k_M^2}}.$$

Останній вираз – це трансцендентне рівняння щодо хвильового числа частинки в квантовій ямі k_a , що легко доводиться прямою підстановкою значень хвильових чисел k_m і k_M в отриманий вираз. Провівши таку підстановку, і, оскільки рішення цього рівняння залежить від величини цілого числа n , вводячи позначення $k_a = k_n$, отримаємо остаточну форму рівняння для визначення хвильових чисел частинки знаходиться в несиметричному прямокутного квантового ямі

$$k_n a = \pi n - \arcsin \frac{\hbar k_n}{\sqrt{2m^* U_m}} - \arcsin \frac{\hbar k_n}{\sqrt{2m^* U_M}},$$

причому, як зазначалося вище, значення арксинуса повинні бути розташованими в першому координатному квадранті. Вирішивши це рівняння щодо хвильового числа k_n легко визначити і значення енергії квантового рівня частинки в квантовій ямі, який починається від дна ями. Дійсно, з визначення k_n відразу впливає, що

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m^*}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Проаналізуємо отримане трансцендентне рівняння.

По-перше, постановка завдання вимагає, щоб рішення цього рівняння знаходилося в межах від нуля до висоти мінімального з бар'єрів (U_m).

По-друге, в разі бар'єрів однакової висоти ($U_m = U_M = U_0$), рівняння спрощується:

$$k_n a = \pi n - 2 \arcsin \frac{\hbar k_n}{\sqrt{2m^* U_0}}.$$

По-третє, в випадку бар'єрів нескінченної висоти, можливо аналітичне рішення, оскільки при цьому рівняння приймає такий вигляд:

$$k_n a = \lim_{U_0 \rightarrow \infty} \left(\pi n - 2 \arcsin \frac{\hbar k_n}{\sqrt{2m^* U_0}} \right) = \pi n,$$

а рішення цього рівняння:

$$k_n = \pi n / a.$$

Отже, енергія частинки в прямокутній симетричній квантовій ямі з нескінченними бар'єрами визначиться як:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m^* a^2} = \frac{h^2 n^2}{8m^* a^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Отже метод розв'язування отриманого трансцендентного рівняння - графічний, який в першому наближенні вимагає побудови складної функції хвильового числа:

$$y_1(n) = \pi n - \arcsin \frac{\hbar k_n}{\sqrt{2m^* U_m}} - \arcsin \frac{\hbar k_n}{\sqrt{2m^* U_M}}$$

і прямої

$$y_2 = k_n a$$

з подальшим перебиранням точок їх перетину. Цей метод досить грубий, в силу того, що по абсцисі потрібно відкладати значення шуканих хвильових чисел, які задовольняють умові

$k_n > 10^7 \text{ м}^{-1}$, тоді як по ординаті - числа кратні π . Можна спростити даний метод. Введемо нову змінну - нормоване хвильове число, шляхом підстановки у вихідне рівняння величини $k_n = \sqrt{2m^*U_m} f_\kappa \kappa_n / \hbar$, і отримаємо:

$$y_1(n) = \pi n - \arcsin(\kappa_n) - \arcsin(\beta_\kappa \kappa_n) \text{ и } y_2 = \alpha_\kappa \kappa_n,$$

де $\alpha_\kappa = \sqrt{2m^*U_m} f_\kappa a / \hbar$ - наведена ширина квантової ями, $\beta_\kappa = \sqrt{U_m/U_M}$ - фактор несиметричності квантової ями, f_κ - дійсне позитивне число, яке відповідає за стиснення або розтягнення графіка вздовж осі абсцис.

Після таких перетворень коріння отриманого рівняння будуть перебувати в діапазоні від нуля до одиниці. Точність рішення може бути збільшена або зменшена шляхом завдання величини f_κ . Останнє, як правило, потрібно лише в разі пошуку положення енергетичного рівня, розташованого трохи нижче рівня мінімального з потенційних бар'єрів квантової ями. Однак можна знехтувати точністю розрахунків і покласти, що $f_\kappa = 1$ і, відповідно, для наведеної ширини квантової ями отримаємо:

$$\alpha_\kappa = \lim_{f_\kappa \rightarrow 1} \sqrt{2m^*U_m} f_\kappa a / \hbar = a \sqrt{2m^*U_m} / \hbar.$$

Також важливим є те, що при обчисленні енергії частки в квантовій ямі за величиною нормованого хвильового числа відсутня необхідність в розрахунку абсолютного хвильового числа (робимо підстановку величини κ_n в вираз для визначення енергії):

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \cdot \frac{2m^*U_m \kappa_n^2}{\hbar^2} = U_m \kappa_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Розв'язок: Згідно з умовами задачі, слід знайти енергетичні рівні електрона в прямокутній квантовій ямі, яка, в свою чергу, може бути як симетричної, так і несиметричної. У випадку несиметричної квантової ями, будемо вважати бар'єри рівними U_m і U_M , відповідно, тоді як в разі симетричної квантової ями, прийдемо до необхідності розгляду двох квантових ям з однаковими бар'єрами рівними, відповідно, U_m і U_M . У всіх цих випадках необхідно визначити величини нормованих хвильових чисел, якими можна охарактеризувати поведінку частинки в квантовій ямі. Шукані числа є дійсними коренями трансцендентного рівняння:

$$\alpha_\kappa \kappa_n = \pi n - \arcsin(\kappa_n) - \arcsin(\beta_\kappa \kappa_n),$$

де $\alpha_\kappa = \sqrt{2m^*U_m} f_\kappa a / \hbar$ - наведена ширина квантової ями, $\beta_\kappa = \sqrt{U_m/U_M}$ - фактор несиметричності квантової ями. Дане рівняння вирішується або чисельними методами, або графічним побудовою функцій

$$y_1(n) = \pi n - \arcsin(\kappa_n) - \arcsin(\beta_\kappa \kappa_n) \text{ и } y_2 = \alpha_\kappa \kappa_n$$

з подальшим перебиранням абсцис точок їх перетину. За величинам нормованих хвильових чисел визначаються положення енергетичних рівнів в величинах енергії, відрахувавши від дна квантової ями:

$$E_n = U_m \kappa_n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Випадок "дрібної" симетричної квантової ями ($U_M = U_m$)

Визначивши параметри трансцендентного рівняння:

- наведена ширина:

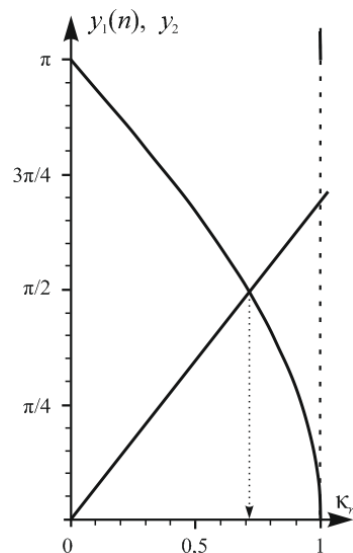
$$\alpha_\kappa = a \sqrt{2m^*U_m} / \hbar = \frac{3 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,109 \cdot 1,094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,21 \cdot 602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 2,1736,$$

- фактор несиметричності:

$$\beta_\kappa = \sqrt{U_m/U_m} = 1,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - \arcsin(\kappa_n) - \arcsin(1 \cdot \kappa_n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$



$$y_2 = \alpha_\kappa \kappa_n = 2,1736 \cdot \kappa_n .$$

графічної побудови (див. рис.), Зазначимо, що в даній квантовій ямі розташований один енергетичний рівень і, відповідне йому нормоване хвильове число дорівнює:

$$\kappa_1 = 0,71385 .$$

Шукана величина енергетичного рівня визначиться як:

$$E_1 = U_m \kappa_1^2 = 0,2 \cdot 0,71385^2 = 0,10191 \text{ эВ} \approx 0,10 \text{ эВ} .$$

Випадок несиметричною квантової ями ($U_m \neq U_M$)

Визначивши параметри трансцендентного рівняння:

- наведена ширина:

$$\alpha_\kappa = a\sqrt{2m^*U_m}/\hbar = \frac{3 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,10 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,21,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 2,1736 ,$$

- фактор несиметричності:

$$\beta_\kappa = \sqrt{0,7/0,2} = 0,5345 ,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - \arcsin(\kappa_n) - \arcsin(0,5345 \cdot \kappa_n) ;$$

$$y_2 = \alpha_\kappa \kappa_n = 2,1736 \cdot \kappa_n .$$

З графічної побудови (див. рис.), слід, що в даній квантовій ямі розташований один енергетичний рівень і, відповідне йому нормоване хвильове число дорівнює:

$$\kappa_1 = 0,8076 .$$

Шукана величина енергетичного рівня визначиться як:

$$E_1 = U_m \kappa_1^2 = 0,2 \cdot 0,8076^2 = 0,1304 \text{ эВ} \approx 0,13 \text{ эВ} .$$

Випадок "глибокої" симетричної квантової ями ($U_m = U_M$)

Випадок "глибокої" симетричної квантової ями:

- наведена ширина:

$$\alpha_\kappa = a\sqrt{2m^*U_M}/\hbar = \frac{3 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,10 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,71,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 4,0664 ,$$

- фактор несиметричності:

$$\beta_\kappa = \sqrt{U_M/U_M} = 1 ,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - \arcsin(\kappa_n) - \arcsin(1 \cdot \kappa_n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n) ;$$

$$y_2 = \alpha_\kappa \kappa_n = 4,0664 \cdot \kappa_n .$$

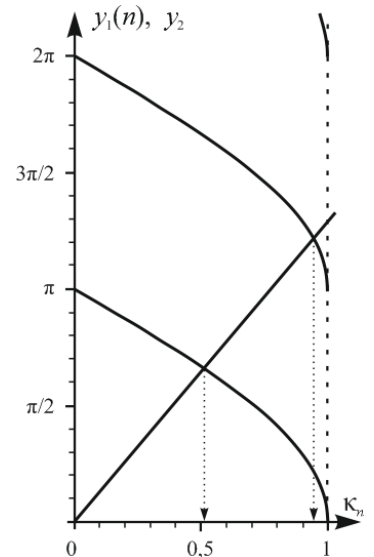
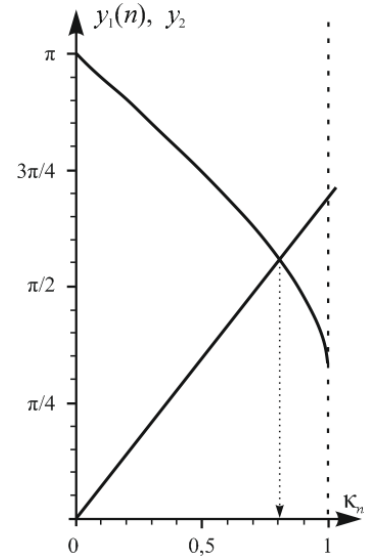
З графічної побудови (див. рис.), випливає, що в даній квантовій ямі розташовано два енергетичних рівня і, відповідні їм нормовані хвильові числа дорівнюють:

$$\kappa_1 = 0,50958 \text{ і } \kappa_2 = 0,94156 .$$

Шукані величини енергетичних рівнів визначаються як:

$$E_1 = U_M \kappa_1^2 = 0,7 \cdot 0,50958^2 = 0,18177 \text{ эВ} \approx 0,18 \text{ эВ} ,$$

$$E_2 = U_M \kappa_2^2 = 0,7 \cdot 0,94156^2 = 0,62057 \text{ эВ} \approx 0,62 \text{ эВ} .$$



Задача 2. Побудувати енергетичну діаграму резонансно-тунельного діода (РТД) на основі напівпровідників $AlAs$ ($E_{g1} = 2,16 \text{ эВ}$) і $In_{0,4}Ga_{0,6}As$ ($E_{g2} = 0,9 \text{ эВ}$, $m_n^* = 0,046 \cdot m_0$). Бічні області РТД виготовлені з електронного напівпровідника з шириною забороненої зони меншою, ніж в області квантової ями (задатися самостійно). Ширина квантової ями – $a = 5 \text{ нм}$, ширина бар'єрів $b = 2,5 \text{ нм}$. Вигином енергетичних зон знехтувати. Скористатися правилом Дінгла

в такій формі: $\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2})$ и $\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2})$. Вважати, що квантова яма - прямокутна і симетрична.

Вказівка: Для розрахунку енергетичних рівнів в прямокутній квантовій ямі скористатися методом, наведеним у попередній задачі.

Розв'язок: Побудова енергетичної діаграми РТД зводиться до наступного алгоритму:

1. Побудувати енергетичну діаграму для квантової ями.
2. Визначити і побудувати скачки потенціалу на границі бар'єр-яма по правилу Дінгла: побудувати енергетичну діаграму для бар'єрних областей.
3. Побудувати енергетичну діаграму для бічних областей.
4. Вирівняти всі енергетичну діаграму по рівню Фермі.
5. Визначити і побудувати енергетичні рівні в квантовій ямі.

Для виконання цього алгоритму визначимо, перш за все, необхідні чисельні значення стрибків потенціалу на кордоні бар'єр-яма і величини енергетичних рівнів в квантовій ямі.

Згідно з правилом Дінгла, знайдемо шукані скачки потенціалу на границі бар'єр-яма:

$$\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,6 \cdot (2,16 - 0,9) = 0,756 \text{ эВ},$$

$$\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,4 \cdot (2,16 - 0,9) = 0,504 \text{ эВ}.$$

Визначимо величину потенційного бар'єру для електронів в прямокутній симетричній квантовій ямі:

$$U_{\bar{e}} = \Delta E_C = 0,756 \text{ эВ}.$$

Визначивши наведену ширину квантової ями:

$$\alpha_{\kappa} = a \sqrt{2m^* U_{\bar{e}}} / \hbar = \frac{5 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,0469 \cdot 1,094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,756 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 4,7769,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$

$$y_2 = \alpha_{\kappa} \kappa_n = 4,7769 \cdot \kappa_n.$$

З графічної побудови (див. рис.), Слід, що в даній квантовій ямі розташовано два енергетичних рівня і, відповідні їм нормовані хвильові числа дорівнюють:

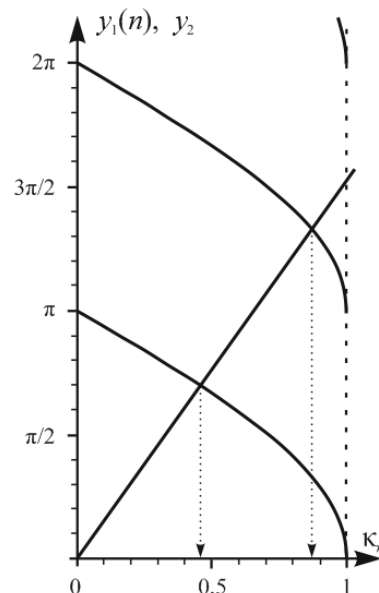
$$\kappa_1 = 0,45832 \text{ і } \kappa_2 = 0,87191.$$

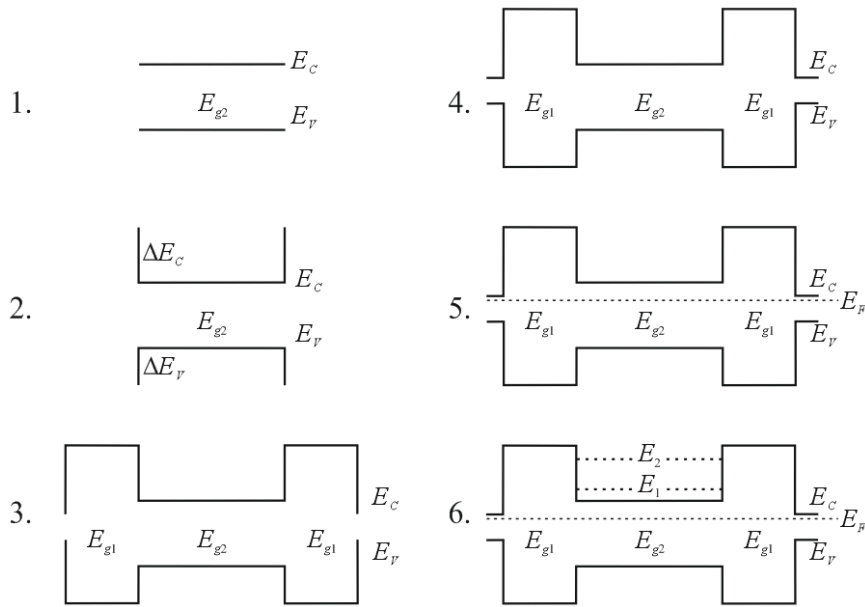
Шукані величини енергетичних рівнів визначаються як:

$$E_1 = U_{\bar{e}} \kappa_1^2 = 0,756 \cdot 0,45832^2 = 0,15881 \text{ эВ} \approx 0,16 \text{ эВ},$$

$$E_2 = U_{\bar{e}} \kappa_2^2 = 0,756 \cdot 0,87191^2 = 0,57472 \text{ эВ} \approx 0,57 \text{ эВ}.$$

Дотримуючись наведеним алгоритмом, побудуємо енергетичну діаграму для заданої РТД-структури (див. рис.):





1 – AlAs, 2 – In_{0,4}Ga_{0,6}As

Задача 3. Побудувати енергетичну діаграму резонансно-тунельного діода (РТД) на основі напівпровідників AlAs ($E_{g1} = 2,16$ eB) і GaSb ($E_{g2} = 0,75$ eB, $m_n^* = 0,047 \cdot m_0$). Бічні області РТД виготовлені з електронного напівпровідника з шириною забороненої зони меншою, ніж в області квантової ями (задатися самостійно). Ширина квантової ями – $a = 5$ нм, ширина бар'єрів $b = 2,5$ нм. Вигином енергетичних зон знехтувати. Скористатися правилом Дінгла в такій формі: $\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2})$ і $\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2})$. Вважати, що квантова яма – прямокутна і симетрична.

Вказівка: Скористатися методом вирішення попередньої задачі.

Розв'язок: Згідно з правилом Дінгла, знайдемо шукані скачки потенціалу на границі бар'єр-яма:

$$\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,6 \cdot (2,16 - 0,75) = 0,846 \text{ eB},$$

$$\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,4 \cdot (2,16 - 0,75) = 0,564 \text{ eB}.$$

Визначимо величину потенційного бар'єру для електронів в прямокутній симетричній квантовій ямі:

$$U_{\bar{e}} = \Delta E_C = 0,846 \text{ eB}.$$

Визначивши наведену ширину квантової ями:

$$\alpha_{\kappa} = a \sqrt{2m^* U_{\bar{e}} / \hbar} = \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{2 \cdot 0,047 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,846 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 5,1079,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$

$$y_2 = \alpha_{\kappa} \kappa_n = 5,1079 \cdot \kappa_n.$$

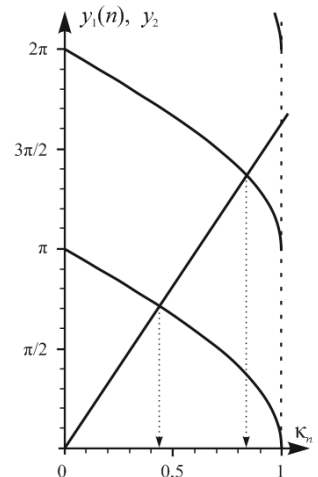
З графічної побудови (див. рис.), В даній квантовій ямі розташовано два енергетичних рівня і, відповідні їм нормовані хвильові числа дорівнюють:

$$\kappa_1 = 0,43767 \text{ і } \kappa_2 = 0,83977.$$

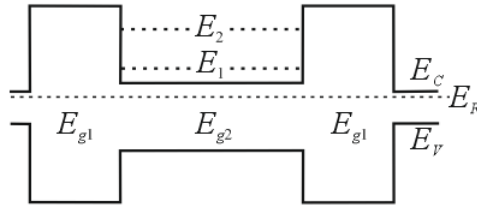
Шукані величини енергетичних рівнів визначаються як:

$$E_1 = U_{\bar{e}} \kappa_1^2 = 0,846 \cdot 0,43767^2 = 0,16206 \text{ eB} \approx 0,16 \text{ eB},$$

$$E_2 = U_{\bar{e}} \kappa_2^2 = 0,846 \cdot 0,83977^2 = 0,59661 \text{ eB} \approx 0,60 \text{ eB}.$$



Шукана енергетична діаграма приведена на рисунку:



1 – AlAs, 2 – GaSb

Задача 4. Побудувати енергетичну діаграму РТД. Бічні області вважати виготовленими з електронного напівпровідника з шириною забороненої зони меншою, ніж в області квантової ями (задатися самостійно). Ширина квантової ями – $a = 5$ нм, ширина бар'єрів $b = 2,5$ нм. Вигином енергетичних зон знехтувати. Скористатися правилом Дінгла в такій формі: $\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2})$ и $\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2})$. Вважати, що квантова яма - прямокутна і симетрична. Розглянути РТД на основі таких напівпровідників $Al_{0,26}Ga_{0,74}As$ ($E_{g1} = 1,75$ еВ) и $GaAs$ ($E_{g2} = 1,45$ еВ, $m_n^* = 0,072 \cdot m_0$), $AlSb$ ($E_{g1} = 1,5$ еВ) і $InAs$ ($E_{g2} = 0,35$ еВ, $m_n^* = 0,023 \cdot m_0$), $GaAs_{0,4}P_{0,6}$ ($E_{g1} = 1,67$ еВ) і $GaAs$ ($E_{g2} = 1,45$ еВ, $m_n^* = 0,072 \cdot m_0$), InP ($E_{g1} = 1,35$ еВ) і $In_{0,2}Ga_{0,8}As$ ($E_{g2} = 1,15$ еВ, $m_n^* = 0,022 \cdot m_0$).

Вказівка: Скористатися методом вирішення попередньої задачі.

Розв'язок: Визначимо необхідні числові дані для побудови енергетичних діаграм в кожному окремому заданому випадку.

РТД на основі $Al_{0,26}Ga_{0,74}As$ і $GaAs$

Згідно з правилом Дінгла, знайдемо шукані скачки потенціалу на границі бар'єр-яма:

$$\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,6 \cdot (1,75 - 1,45) = 0,180 \text{ еВ},$$

$$\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,4 \cdot (1,75 - 1,45) = 0,120 \text{ еВ}.$$

Визначимо величину потенційного бар'єру для електронів в прямокутній симетричній квантовій ямі:

$$U_{\bar{e}} = \Delta E_C = 0,180 \text{ еВ}.$$

Визначивши наведену ширину квантової ями:

$$\alpha_{\kappa} = a \sqrt{2m^* U_{\bar{e}}} / \hbar = \frac{5 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,072 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,180 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 2,9162,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$

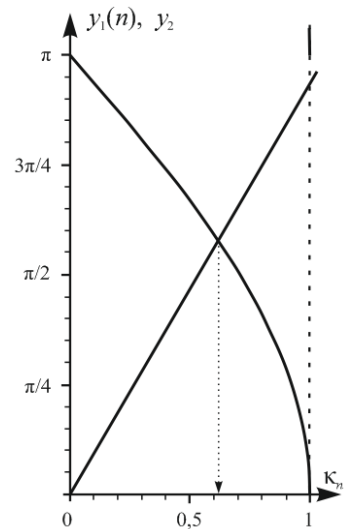
$$y_2 = \alpha_{\kappa} \kappa_n = 2,9162 \cdot \kappa_n.$$

З графічної побудови (див. рис.), В даній квантовій ямі розташований один енергетичний рівень і, відповідне йому нормоване хвильове число дорівнює:

$$\kappa_1 = 0,61928.$$

Шукана величина енергетичного рівня визначиться як:

$$E_1 = U_{\bar{e}} \kappa_1^2 = 0,180 \cdot 0,61928^2 = 0,06903 \text{ еВ} \approx 70 \text{ мєВ}.$$



РТД на основі *AlSb* і *InAs*

Згідно з правилом Дінгла, знайдемо шукані скачки потенціалу на границі бар'єр-яма:

$$\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,6 \cdot (1,5 - 0,35) = 0,69 \text{ эВ},$$

$$\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,4 \cdot (1,5 - 0,35) = 0,46 \text{ эВ}.$$

Визначимо величину потенційного бар'єру для електронів в прямокутній симетричній квантовій ямі:

$$U_{\bar{e}} = \Delta E_C = 0,69 \text{ эВ}.$$

Визначивши наведену ширину квантової ями

$$\alpha_{\kappa} = a \sqrt{2m^* U_{\bar{e}}} / \hbar = \frac{5 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,0239 \cdot 1,094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,69 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 3,2270,$$

запишемо графічні функції у вигляді

$$y_1(n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$

$$y_2 = \alpha_{\kappa} \kappa_n = 3,2270 \cdot \kappa_n.$$

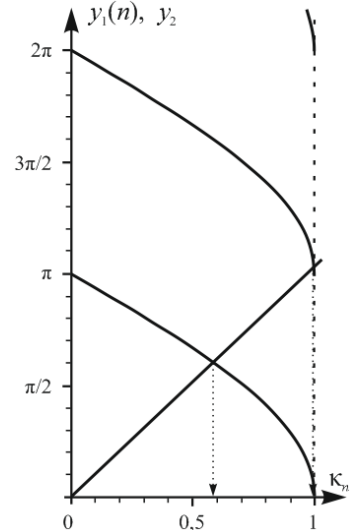
З графічної побудови (див. рис.), в даній квантовій ямі розташовано два енергетичних рівня і, відповідні їм нормовані хвильові числа дорівнюють:

$$\kappa_1 = 0,58571 \text{ і } \kappa_2 = 0,99915.$$

Шукані величини енергетичних рівнів визначаються як:

$$E_1 = U_{\bar{e}} \kappa_1^2 = 0,69 \cdot 0,58571^2 = 0,23671 \text{ эВ} \approx 0,237 \text{ эВ},$$

$$E_2 = U_{\bar{e}} \kappa_2^2 = 0,69 \cdot 0,99915^2 = 0,68882 \text{ эВ} \approx 0,689 \text{ эВ}.$$



РТД на основі *GaAs_{0,4}P_{0,6}* и *GaAs*

Згідно з правилом Дінгла, знайдемо шукані скачки потенціалу на границі бар'єр-яма

$$\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,6 \cdot (1,67 - 1,45) = 0,132 \text{ эВ},$$

$$\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,4 \cdot (1,67 - 1,45) = 0,088 \text{ эВ}.$$

Визначимо величину потенційного бар'єру для електронів в прямокутній симетричній квантовій ямі:

$$U_{\bar{e}} = \Delta E_C = 0,132 \text{ эВ}.$$

Визначивши наведену ширину квантової ями:

$$\alpha_{\kappa} = a \sqrt{2m^* U_{\bar{e}}} / \hbar = \frac{5 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,0729 \cdot 1,094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,132 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 2,4972,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$

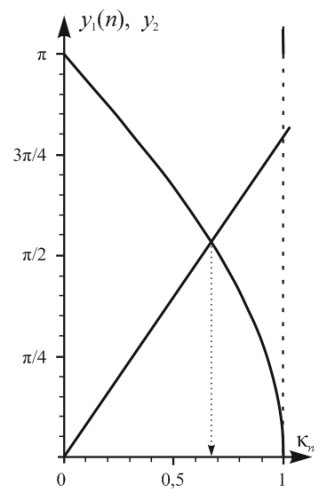
$$y_2 = \alpha_{\kappa} \kappa_n = 2,4972 \cdot \kappa_n.$$

З графічної побудови (див. рис.), випливає, що в даній квантовій ямі розташований один енергетичний рівень і, відповідне йому нормоване хвильове число дорівнює:

$$\kappa_1 = 0,67000.$$

Шукана величина енергетичного рівня визначиться як:

$$E_1 = U_{\bar{e}} \kappa_1^2 = 0,132 \cdot 0,67000^2 = 0,05925 \text{ эВ} \approx 59 \text{ мэВ}.$$



РТД на основі InP і $In_{0,2}Ga_{0,8}As$

Згідно з правилом Дінгла, знайдемо шукані скачки потенціалу на границі бар'єр-яма:

$$\Delta E_C = 0,6 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,6 \cdot (1,35 - 1,15) = 0,120 \text{ эВ},$$

$$\Delta E_V = 0,4 \cdot (E_{g1} - E_{g2}) = 0,4 \cdot (1,35 - 1,15) = 0,080 \text{ эВ}.$$

Визначимо величину потенційного бар'єру для електронів в прямокутній симетричній квантовій ямі:

$$U_{\bar{e}} = \Delta E_C = 0,120 \text{ эВ}.$$

Визначивши наведену ширину квантової ями:

$$\alpha_{\kappa} = a\sqrt{2m^*U_{\bar{e}}}/\hbar = \frac{5 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,0229 \cdot 1,094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,120 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 1,3162,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$

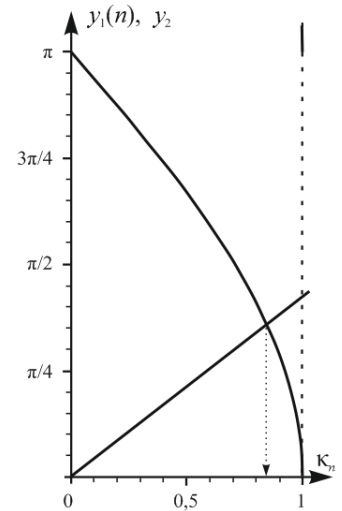
$$y_2 = \alpha_{\kappa} \kappa_n = 1,3162 \cdot \kappa_n.$$

З графічної побудови (див. рис.), випливає, що в даній квантовій ямі розташований один енергетичний рівень і, відповідне йому нормоване хвильове число дорівнює:

$$\kappa_1 = 0,84821.$$

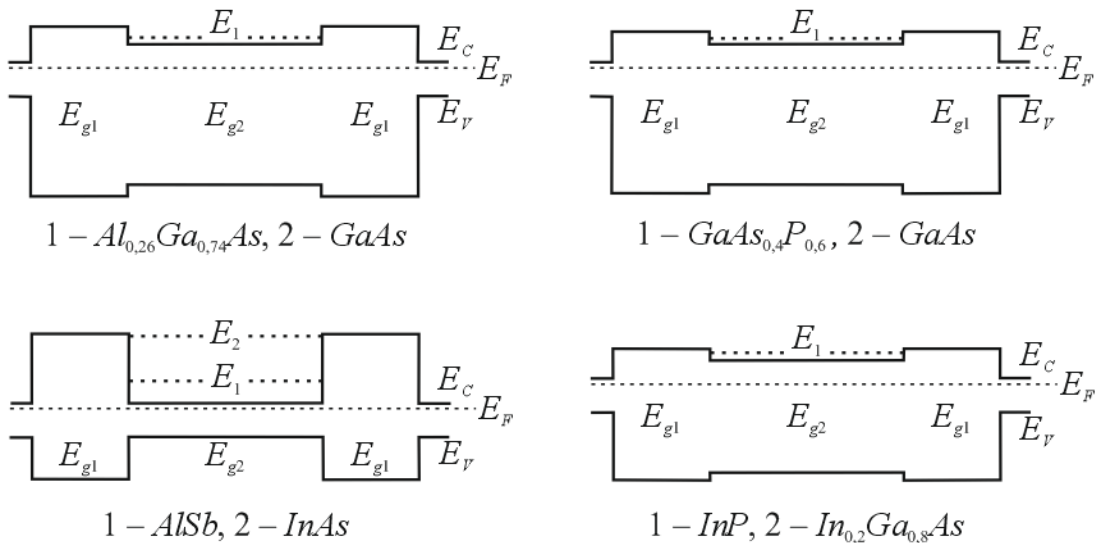
Шукана величина енергетичного рівня визначиться як:

$$E_1 = U_{\bar{e}} \kappa_1^2 = 0,120 \cdot 0,84821^2 = 0,086336 \text{ эВ} \approx 86 \text{ мэВ}.$$



Енергетичні діаграми

Шукані енергетичні діаграми приведені на рисунку:



Задача 5. Розрахувати коефіцієнти прозорості бар'єрів резонансно-тунельного діода і загальний коефіцієнт проходження резонансно-тунельного діода при висоті бар'єрів $U_1 = U_2 = 0,25 \text{ эВ}$, ширині бар'єрів $b_1 = b_2 = 2 \text{ нм}$, ширині квантової ями $a = 3 \text{ нм}$, ефективної масі електронів $m_n^* = 0,072 \cdot m_0$, де m_0 – маса електрона в стані спокою.

Вказівка: Скористатися методом вирішення попередньої задачі.

Розв'язок: Перш за все, визначимо необхідні числові дані для вирішення завдання, а саме, число і положення енергетичних рівнів в квантовій ямі. Оскільки висоти потенціальних бар'єрів рівні між собою, то дана квантова яма є симетричної з глибиною

$$U = U_1 = 0,250 \text{ эВ}.$$

Визначивши наведену ширину квантової ями:

$$\alpha_{\kappa} = a\sqrt{2m^*U}/\hbar = \frac{3 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,072 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,250 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 2,0620,$$

запишемо графічні функції у вигляді:

$$y_1(n) = \pi n - 2 \arcsin(\kappa_n);$$

$$y_2 = \alpha_{\kappa} \kappa_n = 2,0620 \cdot \kappa_n.$$

З графічної побудови (див. рис.), випливає, що в даній квантовій ямі розташований один енергетичний рівень і, відповідне йому нормоване хвилеве число дорівнює:

$$\kappa_1 = 0,72993.$$

Шукана величина енергетичного рівня визначиться як:

$$E_1 = U \kappa_1^2 = 0,250 \cdot 0,72993^2 = 0,13320 \text{ eV}.$$

Для знаходження коефіцієнтів прозорості бар'єрів, врахуємо той факт, що розглядаються бар'єри як однакової висоти, так і однакової ширини, і, отже, шукані коефіцієнти прозорості будуть дорівнювати:

$$T_1 = T_2 = T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{U^2}{(U-E)E} \cdot \sinh^2 \frac{b\sqrt{2m^*(U-E)}}{\hbar}}.$$

Ввівши в даний вираз нову змінну, а саме, $E = E/U$ – питому енергію частинки, що вимірюється в частках енергії висоти потенційного бар'єру, отримаємо:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4(1-E)E} \cdot \sinh^2(\beta_{\kappa} \sqrt{1-E})},$$

де β_{κ} – наведена ширина бар'єру:

$$\beta_{\kappa} = b\sqrt{2m^*U}/\hbar = \frac{2 \cdot 10^{-9} \sqrt{2 \cdot 0,072 \cdot 9,1094 \cdot 10^{-31} \cdot 0,250 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}}{1,0546 \cdot 10^{-34}} = 1,3747.$$

Отриманий вираз для коефіцієнта проходження вірний і для енергій $E > U$ або $E > 1$, тобто для частинок з енергією, яка перевищує висоту потенційного бар'єру. Для знаходження виду залежності коефіцієнта проходження бар'єру, при таких умовах, розглянемо величину гіперболічного синусу:

$$\sinh(\beta_{\kappa} \sqrt{1-E}) = \sinh(\beta_{\kappa} \sqrt{-1 \cdot (E-1)}) = \sinh(I\beta_{\kappa} \sqrt{E-1}) = I \sin(\beta_{\kappa} \sqrt{E-1}).$$

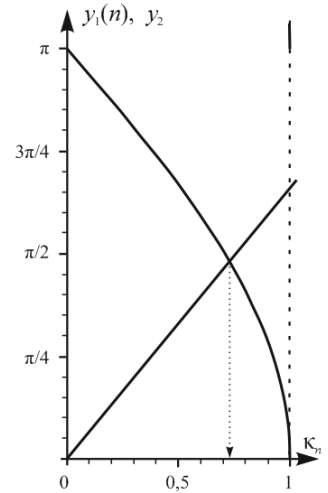
Підставляючи отриманий вираз в вихідну формулу для T , отримаємо:

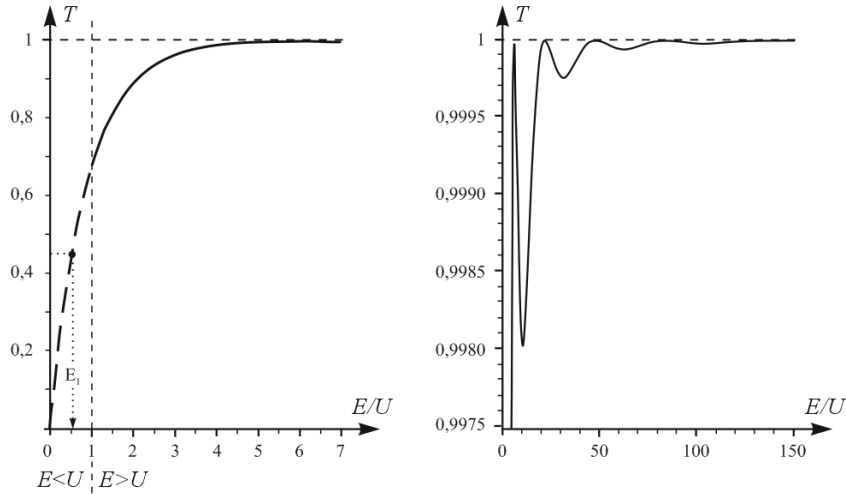
$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4(E-1)E} \cdot \sin^2(\beta_{\kappa} \sqrt{E-1})}.$$

Визначимо також величину коефіцієнта пропускання при енергії частинки, що дорівнює висоті потенційного бар'єру ($E = U$):

$$\lim_{E \rightarrow 1} (1/T) = 1 + \lim_{E \rightarrow 1} \frac{\sinh^2(\beta_{\kappa} \sqrt{1-E})}{4(1-E)E} = 1 + \frac{\beta_{\kappa}^2}{4}.$$

Залежність коефіцієнта прозорості даних потенційних бар'єрів приведена на рисунку:





З побудови видно, що даний потенційний бар'єр стає практично прозорим лише при $E > 5U$, але навіть і в цьому випадку є осциляції коефіцієнта проходження аж до $E = 150U$. Ці залежності виконуються лише в області енергій частинок більшої висоти потенційного бар'єру ($E \geq U$) і характеризують надбар'єрний механізм провідності. В області енергій частинок меншої висоти потенційного бар'єру ($E < U$), пройти крізь бар'єр можуть тільки частинки з енергіями, які збігаються з енергетичними рівнями квантової ями РТД. Отже, шукані величини коефіцієнтів проходження потенційних бар'єрів визначаються як:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4 \cdot \left(1 - \frac{0,13320}{0,250}\right) \cdot \frac{0,13320}{0,250}} \cdot \sinh^2 \left(1,3747 \sqrt{1 - \frac{0,13320}{0,250}}\right)} = 0,45863 \approx 0,46.$$

Як відомо, загальний коефіцієнт пропускання РТД-структури визначається за формулою:

$$D = \frac{4T_1T_2}{(T_1 + T_2)^2} \cdot \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma_n^2 + 4(E - E_n)^2},$$

де $\Gamma_n = \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{E_n}{2m^*}} \cdot (T_1 + T_2)$ – ширина резонансного рівня в квантовій ямі.

Оскільки розглядається випадок рівних бар'єрів, то вираз для коефіцієнта пропускання можна спростити:

$$\lim_{\substack{T_2 \rightarrow T \\ T_1 \rightarrow T}} D = \frac{4TT}{(T + T)^2} \cdot \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma_n^2 + 4(E - E_n)^2} = \frac{1}{1 + 4\left(\frac{E - E_n}{\Gamma_n}\right)^2},$$

Причому:

$$\lim_{\substack{T_2 \rightarrow T \\ T_1 \rightarrow T}} \Gamma_n = \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{E_n}{2m^*}} \cdot (T + T) = \frac{2\hbar T}{a} \sqrt{\frac{E_n}{2m^*}}.$$

Підставивши отриманий вираз ширини резонансного рівня в квантовій ямі в вираз для загального коефіцієнта пропускання РТД-структури, а також розкриваючи коефіцієнт проходження потенційного бар'єру і роблячи необхідні перетворення, отримаємо:

$$D = \frac{1}{1 + \frac{2m^* a^2 (E - E_n)^2}{\hbar^2 E_n} \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{U^2}{(U - E)E}\right)^2}.$$

Ввівши в даний вираз нову змінну, а саме, $E = E/U$ – питому енергію частинки, що вимірюється в частках енергії висоти потенційного бар'єру, отримаємо:

$$D = \frac{E_n}{E_n + \alpha_\kappa^2 \cdot (E - E_n)^2 \left(1 + 1/(4E - E^2)\right)^2},$$

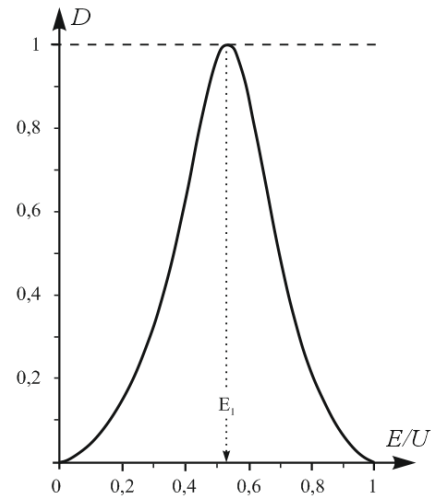
де $\alpha_\kappa = a\sqrt{2m^*U}/\hbar$ – наведена ширина квантової ями, $E_n = E_n/U$ – відносна висота n -того енергетичного рівня в квантовій ямі. Згідно з умовами завдання, отримаємо:

$$E_n = E_1 = E_1/U = \frac{0,13320}{0,25} = 0,53280.$$

Залежність загального коефіцієнта пропускання РТД-структури наведена на рисунку. З побудови, видно, що максимальний коефіцієнт пропускання РТД-структури зосереджений в околиці енергетичного рівня квантової ями, а сама залежність має яскраво виражений резонансний характер.

Визначимо шукану величину загального коефіцієнта пропускання РТД-структури для частинки з енергією, що збігається з енергетичним рівнем у квантовій ямі:

$$\lim_{E \rightarrow E_n} D = \frac{E_n}{E_n + \alpha_\kappa^2 \cdot 0 \cdot \left(1 + 1/(4E - E^2)\right)^2} = 1.$$



Задача 6. Визначити ширину резонансного рівня в квантовій ямі РТД при висоті бар'єрів $U_1 = U_2 = 0,25$ еВ, ширині бар'єрів $b_1 = b_2 = 2$ нм, ширині квантової ями $a = 3$ нм, ефективній масі електронів $m_n^* = 0,072 \cdot m_0$, де m_0 – маса електрона в стані спокою.

Розв'язок: Ширина резонансного рівня в квантовій ямі визначається як:

$$\Gamma_n = \frac{\hbar}{a} \sqrt{\frac{E_n}{2m^*}} \cdot (T_1 + T_2) = \frac{2\hbar\Gamma}{a} \sqrt{\frac{E_n}{2m^*}}.$$

Згідно з умовами завдання потенційні бар'єри рівні і в квантовій ямі знаходиться всього один енергетичний рівень, в силу чого, ширина резонансного рівня дорівнює:

$$\Gamma_n = \Gamma_1 = \frac{2\hbar\Gamma}{a} \sqrt{\frac{E_1}{2m^*}} = \frac{2 \cdot 1,0546 \cdot 10^{-34} \cdot 0,45863}{3 \cdot 10^{-9}} \cdot \sqrt{\frac{0,13320 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 0,0729 \cdot 1,094 \cdot 10^{-31}}} = 8,11742 \cdot 10^{-2} \text{ еВ} \approx 81 \text{ мєВ}$$

і швидкість електронів на цьому рівні:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{m^*}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,13320 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{0,0729 \cdot 1,094 \cdot 10^{-31}}} = 8,0670 \cdot 10^5 \text{ м/с} \approx 800 \text{ км/с}.$$

Задача 7. При якій напруженості електричного поля можливо тунелювання в надгратці, що містить в квантовій ямі два енергетичних рівня E_1 і E_2 , з нижнього рівня E_1 квантової ями на верхній рівень E_2 в сусідній квантовій ямі. $E_1 = 0,16$ еВ, $E_2 = 0,64$ еВ. Ширина бар'єру $b = 2$ нм, ширина квантової ями $a = 3$ нм. Вважати, що питомі провідності області бар'єру і квантової ями рівні.

Розв'язок: У разі квантової надгратки, умова тунелювання електрона з верхнього рівня даної квантової ями на нижній рівень сусідньої ями має вигляд:

$$qEd = E_2 - E_1,$$

де $d = a + b$ – період надгратки.

Отже, шукана напруженість електричного поля визначиться як:

$$E = (E_2 - E_1)/(q(a + b)) = \frac{0,64 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} - 0,16 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{1,602 \cdot 10^{-19} (3 \cdot 10^{-9} + 2 \cdot 10^{-9})} = 9,6 \cdot 10^7 \text{ В/м} = 9,6 \cdot 10^5 \text{ В/см}.$$

Задача 8. Визначити які частоти випромінюються при протіканні струму через контакт двох надпровідників (ефект Джозефсона) при прикладенні до нього напруги $U = 0,001 \text{ В} - 0,01 \text{ В}$.

Розв'язок: При ефекті Джозефсона частота електромагнітного випромінювання пов'язана з напругою на джозефсонському переході залежністю:

$$h\nu = 2qU .$$

З наведеного виразу визначимо частоту випромінювання при ефекті Джозефсона:

$$\nu = 2qU/h = \frac{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{6,626 \cdot 10^{-34}} \cdot U = 4,836 \cdot 10^{14} \cdot U \text{ [Гц / В]} = 483,6 \cdot U \text{ [ТГц / мВ]},$$

і, отже, шукані частоти визначаються як:

$$\nu_1 = 483,6 \cdot U = 483,6 \cdot 1 = 483,6 \text{ ТГц} \text{ и } \nu_2 = 483,6 \cdot U = 483,6 \cdot 10 = 4,836 \text{ ТТГц} .$$

Задача 9. Яку напругу потрібно прикласти до джозефсоновського переходу для отримання випромінювання з частотою $500 \text{ ТГц} - 1 \text{ ТТГц}$?

Розв'язок: При ефекті Джозефсона частота електромагнітного випромінювання пов'язана з напругою на джозефсонском переході залежністю:

$$h\nu = 2qU .$$

З наведеного виразу визначимо напругу на переході Джозефсона:

$$U = h\nu/(2q) = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} \cdot \nu = 2,068 \cdot 10^{-15} \cdot \nu \text{ [В / Гц]} = 2,068 \cdot \nu \text{ [мВ / ТГц]},$$

і, отже, шукані напруги визначаються як:

$$U_1 = 2,068 \cdot 0,5 = 1,034 \text{ мВ} \text{ и } U_2 = 2,068 \cdot 1,0 = 2,068 \text{ мВ} .$$

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Аркуша Ю. В. Задачи по твердотелой электроники. Учебное пособие. – Ю.И. Аркуша, Н.И. Белецкий, Э.Д. Прохоров. – Харьков: ХНУ, 2004. – 144с.
2. Борисов О. В. Основи твердотільної електроніки: Навчальний посібник – О. В. Борисов; за ред. Ю. І. Якименка. – К.: Освіта України. – 2011. – 462 с.
3. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. В 2-х книгах. Пер. с англ. – 2-е перераб. и доп. изд. – М.: Мир. – 1984. – 456с.
4. Гуртов. Твердотельная электроника.- Москва: Техносфера, 2005.- 408 с.
5. Свечников С.В. Элементы оптоэлектроники. – М.: Сов. Радио. 1971. – 287с.
6. Носов Ю.Р. Оптоэлектроника. – М.: Радио и связь, 1989. – 360с.
7. Прохоров Е.Д. Твердотільна електроніка: навчальний посібник. - Харьков: ХНУ, 2007. – 544с.
8. Е.Д. Прохоров , Ю.В. Аркуша, М.І. Білецький, М.О. Шеховцов. Практикум з твердотілої електроніки/ Харків : ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2007. – 396с.