# Тема 3. Похибки вимірювань

Метрологія виходить із позиції, що результат вимірювання завжди відрізняється від істинного значення вимірюваної величини. Тому під час вимірювань ФВ виникає ***похибка***, яка дорівнює різниці між значенням $\boldsymbol{X}$ фізичної величини та її істинним $\boldsymbol{X_i}$ значенням

$$\Delta X = X - X_i$$

Оскільки істинне значення ФВ невідоме, то похибку вимірювання з даного рівняння визначити неможливо. ***Для визначення похибки істинне значення ФВ замінюють дійсним***

$$\Delta X = X - X_д$$

**Абсолютна похибка вимірювання** - різниця між результатом вимірювання і дійсним значенням вимірюваної величини

***Абсолютна похибка виражена в абсолютних одиницях вимірюваної величини.***

На практиці дійсне значення ФВ може бути знайдено:

- за допомогою багаторазових вимірювань із наступним усередненням результатів спостережень і представленням цього середнього в якості дійсного;
- за допомогою зразкового засобу вимірювання

Якщо абсолютну похибку взяти з протилежним знаком і алгебрично додати до результату вимірювання, то ***можна вилучити систематичну похибку з результатів вимірювання***, або ***ввести поправку в результати вимірювання***.

$$\Delta q = -\Delta X$$

**Поправка** - значення величини, що алгебрично додається до результату вимірювання з метою вилучення систематичної похибки

У багатьох випадках числове значення абсолютної похибки не дає правильного уявлення про точність вимірювання, ступінь достовірності одержаного результату. Тому введено більш універсальну характеристику точності у вигляді ***відносної похибки*.**

**<u>Відносна похибка вимірювання</u>** - відношення абсолютної похибки вимірювання до дійсного значення вимірюваної величини

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_д} = \frac{X - X_д}{X_д}$$

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_д} \cdot 100\% = \frac{X - X_д}{X_д} \cdot 100\%$$

*Чим менша похибка вимірювання, тим вища його точність, отже, тим менша різниця між істинним значенням ФВ і результатом її вимірювань*

**Точність вимірювання** - головна характеристика якості вимірювання, що відображає близькість результату вимірювання до істинного значення вимірюваної величини.

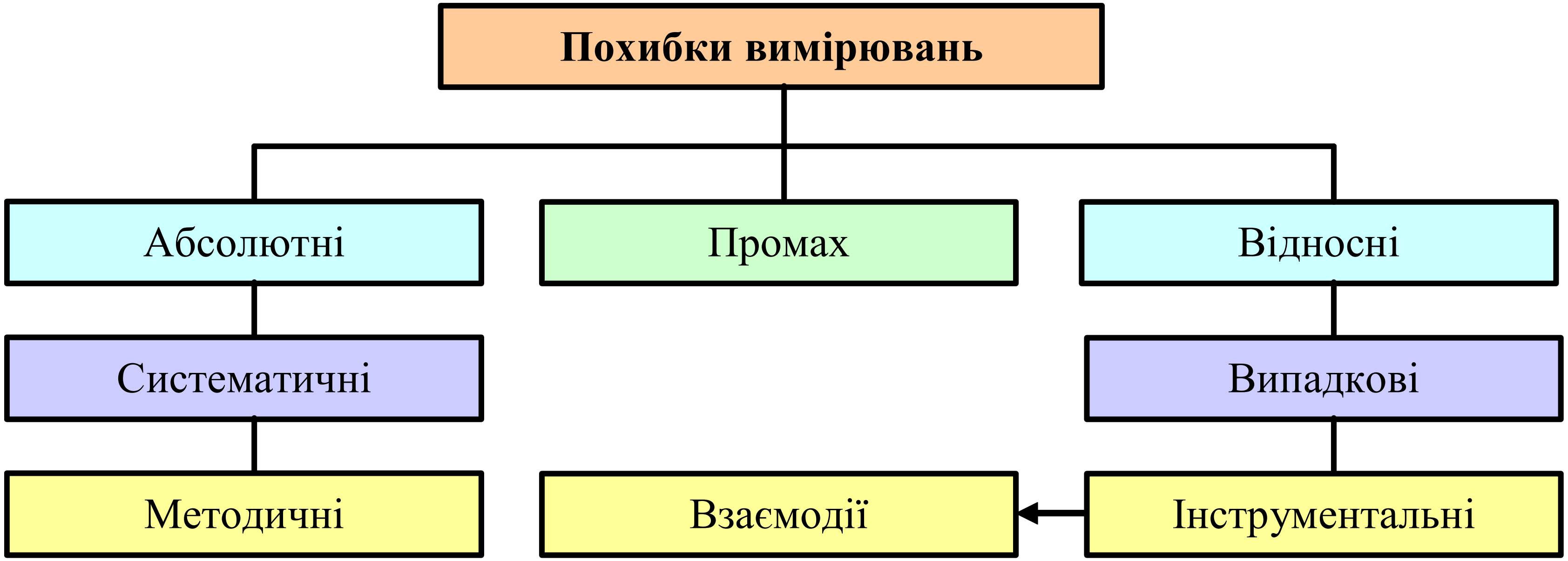
$$\Theta = \frac{1}{\delta} = \frac{X_д}{X - X_д}$$

**Надмірна похибка** - похибка вимірювання, що суттєво перебільшує очікувану (у даних умовах) похибку.

**Промах** - результат вимірювання, що має надмірну похибку

В методиках оцінки результатів вимірювань промахи вилучають із ряду багаторазових спостережень, як аномальні результати вимірювання.

## ***Класифікація похибок вимірювання***




**За способом вираження** похибки поділяються на абсолютні й відносні;
**за характером зміни** - на систематичні і випадкові

$$\bar{\Delta}$$

**Систематична похибка** - складова похибки , що залишається сталою або прогнозовано змінюється у ряді вимірювань тієї ж величини.

$$\overset{o}{\Delta}$$

**Випадкова похибка** - складова похибки, що непрогнозовано змінюється у ряді вимірювань тієї ж величини.

***Оскільки у похибку вимірювання входить випадкова складова, то її слід вважати величиною випадковою.***

$$\Delta = \bar{\Delta} + \overset{o}{\Delta}$$

Використовуючи апарат підсумовування частинних (часткових) похибок випадкового характеру і частинних (часткових) похибок систематичного характеру, можна оцінити повну похибку вимірювання.

Крім точності вимірювань застосовують характеристики якості вимірювань: ***правильність***, ***збіжність*** та ***відтворюваність*** вимірювань.

**Правильність вимірювань** - характеристика якості вимірювання, що відображає близькість до нуля систематичної похибки вимірювання.

**Збіжність результатів вимірювання** - характеристика якості вимірювань, що відображає близькість повторних результатів вимірювань однієї й тієї ж величини в однакових умовах.

Збіжність результатів вимірювань відображає близькість до нуля випадкової похибки.

***Збіжність може бути оцінена кількісно дисперсією результатів вимірювань.***

**Відтворюваність вимірювань** - характеристика якості вимірювань, що відображає близькість результатів вимірювань однієї й тієї ж величини, виконаних в різний час, в різних умовах, різними методами і засобами.

***Відтворюваність може бути оцінена кількісно дисперсією результатів вимірювання.***

***За місцем виникнення*** похибки вимірювання розподіляються на ***інструментальні*** й ***методичні***.

**Інструментальна похибка** - складова похибка вимірювання, зумовлена властивостями засобів вимірювальної техніки.

Інструментальна похибка ***складається з похибки засобів вимірювальної техніки та похибки від їхньої взаємодії з об'єктом вимірювання***.

**Похибка від взаємодії** - Складова інструментальної похибки, що виникає внаслідок впливу засобів вимірювальної техніки на стан об'єкта вимірювання.

**Методична похибка** - складова похибки вимірювання, що зумовлена неадекватністю об'єкта вимірювання та його моделі, прийнятою при вимірюванні.

# ***Систематичні похибки і методи їх вилучення***

Повністю вилучити систематичні похибки неможливо, завжди залишаються невраховані залишки. Ці залишки необхідно врахувати, щоб оцінити межі невилученої систематичної похибки результату.

***Для виявлення, оцінки і вилучення систематичних похибок необхідно:***

- знати місце і причини їх виникнення,
- знати способи виявлення і вилучення цих похибок.

Залежно від причин виникнення ***систематичні похибки можна розподілити на чотири групи***:

- інструментальні;
- методичні;
- суб’єктивні;
- похибки встановлення.

**Похибки встановлення:** такі, прояви яких зумовлені неправильним застосуванням міри: встановлення приладу з нахилом або відхилення зовнішніх умов від нормальних (наявність зовнішніх полів, відхилення температури від нормальної тощо).

**Суб'єктивні похибки:** проявляються в результаті особливостей самого спостерігача.
**Наприклад,** при підрахунку поділок шкали різні люди по-різному оцінюють одне і те саме положення стрілки.

**Інструментальні похибки:** зумовлені недосконалістю технології виготовлення засобів вимірювань.

**Методичні похибки:** виникають через недоліки самого методу вимірювання або через неточність застосованих спрощених формул.
**Наприклад,** при непрямому вимірюванні площі перерізу круглого стержня прямим вимірюванням діаметра з наступним обчисленням площі $S = \pi d^2/4$ результат буде із систематичною методичною похибкою через обмежене число знаків і значення числа $\pi$

***За характером зміни в часі*** систематичні похибки поділяють на: ***постійні***, ***прогресивні***, ***періодичні***.

**Постійні похибки:** такі, які тривалий час залишаються незмінними і протягом вимірювального експерименту є постійними. Часто вони носять технологічний характер і **виникають, наприклад, при недостатньо точному намотуванні котушок індуктивності, під час градуювання шкали і т.ін.**

**Прогресивні похибки:** Це такі похибки, які у процесі даної серії вимірювань неперервно зростають або зменшуються, тобто є функцією часу.

**Вони можуть бути спричинені повільним зменшенням (збільшенням) напруги живлення, прогріванням приладу і іншими причинами.**

**Періодичні похибки:** До їх числа належать систематичні похибки, значення яких є періодичною функцією або часу, або самої вимірюваної величини.

## ***Випадкові похибки***

**Випадковість похибок зумовлюється:**

- нестаціонарністю і випадковим характером вимірюваної фізичної величини;
- несталістю метрологічних характеристик засобів вимірювань, яка визначається випадковим характером формування коефіцієнтів перетворення вимірювальних пристроїв;
- випадковим характером впливу зовнішніх факторів на засіб вимірювання у процесі вимірювального експерименту.

Кількісно випадковий процес описують випадковою функцією часу $X(t)$, яка в будь-який момент часу $t$ може набувати різних значень із деяким розподілом імовірностей. Для будь-якого $t_i$ значення $X_i = X(t_i)$ є випадковою величиною. Випадковий процес визначається сукупністю проявів процесу в часі і законами цієї сукупності.

Функціональна залежність проявів процесу називається ***реалізацією випадкової функції.***

Для характеристики частоти появи випадкових похибок теорія ймовірностей пропонує використовувати ***закони розподілу***. При цьому виділяється два види опису законів розподілу: ***інтегральний*** і ***диференціальний***.

***Інтегральним законом розподілу або функцією розподілу ймовірностей F(x)*** випадкової величини ***X*** називають функцію, значення якої для кожного ***x*** є ймовірністю події, яка полягає в тому, що випадкова величина ***X*** приймає значення менші ***x***

$$F(x) = P|X < x|$$

Дана функція є неспадною функцією x і змінюється в межах:

$$F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1$$

Вона існує для всіх випадкових величин як дискретних, так і неперервних.

Для випадкової величини з неперервною і диференційованою функцією розподілу ***F(x)*** можна знайти ***диференціальний закон розподілу ймовірностей як похідну від F(x)***

$$p(x) = F^{\bullet}(x)$$

Ця залежність називається ***густиною розподілу ймовірностей***. Вона завжди позитивна і відповідає умові нормування

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$$

# Розподіл Гаусса

Похибка вимірювання визначається великим числом частинних складових, що носять випадковий характер, а **з центральної граничної теореми ймовірностей випливає, що розподіл похибок вимірювання буде близьким до нормального, якщо результати спостережень формуються під впливом великої кількості незалежно діючих частинних похибок випадкового характеру**, кожна з яких є незначною за значенням порівняно із загальною випадковою похибкою вимірювання.

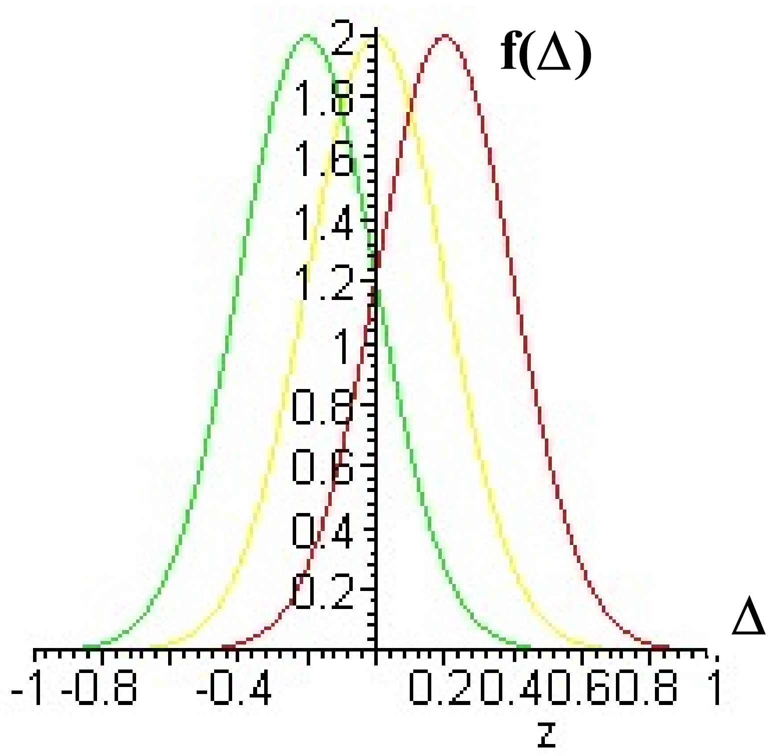
Щільність імовірностей нормального закону описується виразом

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)^2\right]$$

$\sigma$ - середнє квадратичне відхилення

$\Delta$ - випадкова складова похибки.

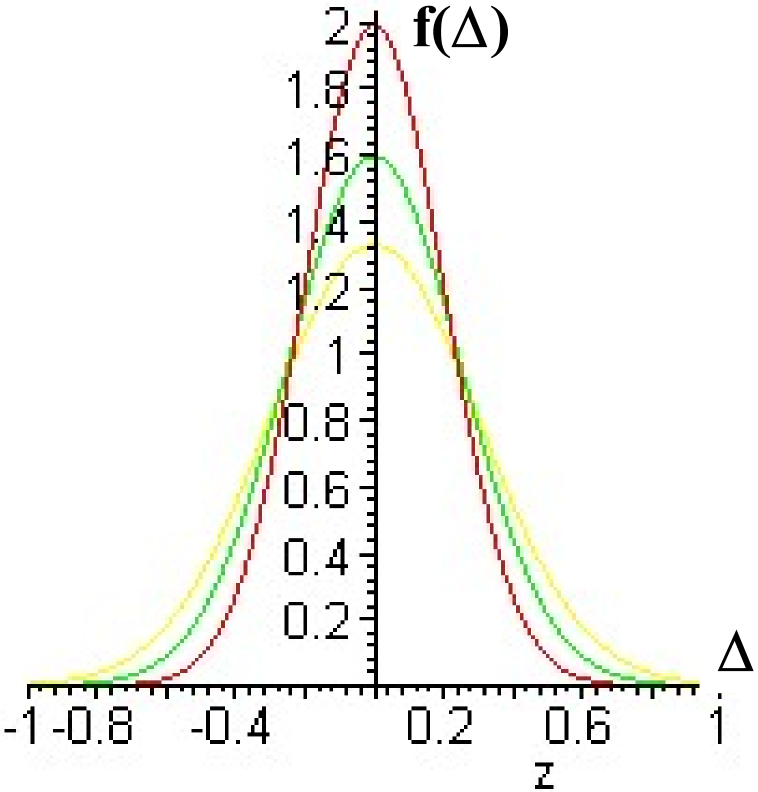
# Щільність розподілу для нормального закону




$$\overline{\Delta} \neq 0$$

Крива зміщена праворуч або ліворуч від початку осі ординат на значення $\overline{\Delta}$ в залежності від знака систематичної складової похибки

# Щільність розподілу для нормального закону




$$\overline{\Delta} = 0$$

Крива симетрична відносно осі ординат.

Значення σ впливає на гостровершинність кривої. ***Збільшення значення σ*** приводить до зменшення гостровершинності, і тому ***імовірніша поява великих похибок***.

***При зменшенні σ*** зростає ймовірність появи малих похибок і ***знижується ймовірність появи великих похибок***.

Основними числовими характеристиками нормального закону розподілу є ***математичне очікування*** і ***дисперсія***.

**Математичне очікування похибки вимірювань** є невипадковою величиною, відносно якої розсіюються інші значення похибки при повторних вимірюваннях. **Математичне очікування характеризує систематичну складову похибки**.

**Дисперсія похибки** характеризує ступінь розсіювання окремих значень похибки відносно математичного очікування. Чим менша дисперсія, тим точніше виконано вимірювання. Отже, дисперсія може служити характеристикою точності вимірювань. **В зв'язку з тим, що дисперсія виражається в одиницях похибки в квадраті, то як числову характеристику точності вимірювань використовують середнє квадратичне відхилення** (квадратний корінь від дисперсії) з позитивним знаком і в одиницях вимірюваної величини.

Знання тільки середнього квадратичного відхилення не дозволяє знайти максимальну похибку, що підкреслює обмежені можливості такої числової характеристики похибки, як σ .

**Максимальне значення похибки залежить не тільки від *σ*, але й від виду закону розподілу.** Коли розподіл похибки теоретично не обмежений, наприклад, для нормального закону розподілу, **похибка може бути будь-якою за значенням**.

В цьому випадку можна говорити тільки про **інтервал, за границі якого похибка не виходить з деякою ймовірністю**. Цей інтервал **називають *довірчим***, *а* ***ймовірність, що характеризує його, - довірчою ймовірністю***.

Довірчий інтервал і довірчу ймовірність вибирають в залежності від конкретних умов вимірювання.

Для нормального закону розподілу випадкових похибок часто використовують довірчий інтервал від ***-3σ*** до ***+3σ***, для якого довірча ймовірність P=0.9973.

## *Оцінка випадкових похибок прямих вимірювань*

**Рівноточні вимірювання** - багаторазові вимірювання однієї фізичної величини в однакових умовах одним оператором і за допомогою одного і того самого засобу вимірювання. При таких вимірюваннях проявляються випадкові похибки.

**При статистичній обробці результатів багаторазових вимірювань необхідно виконати таку послідовність дій:**

1. Провести багаторазові вимірювання і отримати масив вимірювальної інформації:

$$X_1, X_2, \ldots X_n$$

2. Ввести поправку в результати вимірювань, вилучивши відомі систематичні похибки.

3. Знайти математичне очікування поправлених результатів спостережень і прийняти його за дійсне значення.

Для нормального закону розподілу за оцінку математичного очікування ряду рівноточних спостережень приймають середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

4. Визначити випадкове відхилення при і-му спостереженні. Воно може бути позитивною і негативною величиною.

$$\vartheta_i = X_i - \bar{x}$$

5. Обчислити експериментальне середнє квадратичне відхилення (СКВ) результатів вимірювання за формулою Бесселя

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Параметр ***S*** характеризує розсіювання результатів багаторазових вимірювань однієї і тієї ж величини.

Оскільки обчислюється ***середнє арифметичне***, необхідне для одержання оцінки σ, то ***природно взяти його за результат вимірювання***. В даному випадку середнє арифметичне залежить від числа вимірювань і є випадковою величиною, яка має деякі дисперсії відносно істинного значення.

6.Визначити середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного

$$\overline{\sigma}[\overline{x}] = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Якщо в якості результату багаторазових вимірювань взяти середнє арифметичне $\overline{x}$ , то випадкова похибка **S** зменшується в $\sqrt{n}$ раз порівняно з випадком, коли за результат багаторазових вимірювань приймалось будь-яке одне з **n** спостережень

7.Визначити довірчі границі похибки вимірювання, що являють собою верхню й нижню межі, які накривають із заданою ймовірністю похибку вимірювання.

Якщо число вимірювань $n \leq 20 \ldots 30$, то довірчий інтервал випадкової похибки при заданих імовірності P і середньому квадратичному відхиленні $\bar{\sigma}[\bar{x}]$ визначається за формулою Стьюдента

$$\Delta_{д} = \pm k_{t} \cdot \bar{\sigma}[\bar{x}]$$

$k_t$ - коефіцієнт розподілу Стьюдента, який залежить від заданої ймовірності P і числа вимірювань n.

Як правило, приймають P = 0.95. Якщо вимірювання повторити неможливо, то P=0.99, а в особливо відповідальних випадках - P = 0.997.

8.Представити результат вимірювання $\bar{x} \pm \Delta_{д}\, ; P$

# Значення коефіцієнта Стьюдента

| n-1 | P=0.95 | P=0.99 | n-1 | P=0.95 | P=0.99 |
|---|---|---|---|---|---|
| **3** | 3.182 | 5.841 | **16** | 2.120 | 2.921 |
| **4** | 2.776 | 4.604 | **18** | 2.101 | 2.878 |
| **5** | 2.571 | 4.032 | **20** | 2.086 | 2.845 |
| **6** | 2.447 | 3.707 | **22** | 2.074 | 2.819 |
| **7** | 2.367 | 3.500 | **24** | 2.064 | 2.797 |
| **8** | 2.306 | 3.355 | **26** | 2.056 | 2.779 |
| **9** | 2.262 | 3.250 | **28** | 2.048 | 2.763 |
| **10** | 2.228 | 3.169 | **30** | 2.043 | 2.750 |
| **12** | 2.179 | 3.055 | | | |
| **14** | 2.145 | 2.977 | $\infty$ | 1.960 | 2.576 |

## Приклад. Обробка результатів прямих вимірювань

Проведено ряд вимірювань за допомогою вольтметра магнітоелектричної системи. При цьому одержано такі результати:
**122; 118; 120; 121; 119; 120 [В].**
Визначити середнє значення виміряної напруги, його СКВ. Представити результат, вказавши границі довірчого інтервалу, в який потрапляє похибка вимірювання із заданою ймовірністю **P=0.95** (коефіцієнт Стьюдента дорівнює **2.571**).

**1.** Математичне очікування для ряду вимірювань

$$\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i = \frac{122+118+120+121+119+120}{6} = 120[В]$$

**2.** Випадкові відхилення

$$\vartheta_1 = U_1 - \bar{u} = 122 - 120 = +2[В]$$

$$\vartheta_4 = U_4 - \bar{u} = 121 - 120 = +1[В]$$

$$\vartheta_2 = U_2 - \bar{u} = 118 - 120 = -2[В]$$

$$\vartheta_5 = U_5 - \bar{u} = 119 - 120 = -1[В]$$

$$\vartheta_3 = U_3 - \bar{u} = 120 - 120 = \quad 0[В]$$

$$\vartheta_6 = U_6 - \bar{u} = 120 - 120 = \quad 0[В]$$

**3.** Перевірка, чи сума випадкових відхилень дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{6} \vartheta_i = 0$$

**4.** Оцінка експериментального середнього квадратичного відхилення

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(2)^2 + (-2)^2 + 0 + (1)^2 + (-1)^2 + 0}{6}} = 1.41[B]$$

**5.** Середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного

$$\overline{\sigma}[\overline{u}] = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{1.41}{\sqrt{6}} = 0.575[B]$$

**6.** Довірчі границі похибки вимірювання

$$\Delta_Д = \pm k_t \cdot \overline{\sigma}[\overline{u}] = 0.575 \cdot 2.571 = 1.48[B]$$

**7.** Результат у відповідності до стандартної форми

$$U = 120.00 \pm 1.48 \text{ В}, \; P = 0.95$$

## *Оцінка випадкових похибок опосередкованих вимірювань*

**Оцінку випадкових похибок опосередкованих вимірювань необхідно здійснювати за такою методикою:**

1. Визначити для результатів прямих вимірювань $\bar{x}$ і $\bar{\sigma}[\bar{x}]$

2. Визначити значення невідомої величини $\bar{q} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$

3. Визначити «вагу» кожної часткової похибки опосередкованих вимірювань $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_i = \bar{x}_i}$

4. Обчислити часткові випадкові похибки опосередкованих вимірювань $\bar{e}_{\bar{x}_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \bar{\sigma}[\bar{x}_i]$

5. Знайти оцінку СКВ результату опосередкованих вимірювань

$$\bar{\sigma}_{\bar{q}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \bar{\sigma}_{x_i}^2}$$

6. Знайти коефіцієнт Стьюдента за заданою довірчою ймовірністю P і кількістю вимірювань n

7. Знайти граничні значення випадкової складової похибки, яку приймають за похибку опосередкованого вимірювання

$$\Delta = \pm k_t \cdot \bar{\sigma}_{\bar{q}}$$

8. Записати результат опосередкованого вимірювання $q \pm \Delta,\ P$

## Для визначення похибки результату опосередкованого вимірювання необхідно застосувати такі правила:

1. Якщо результат вимірювання є сумою або різницею двох і більше виміряних величин: $q = x+\ldots+z - (u+\ldots+w)$

і похибки $\Delta x, \ldots, \Delta w$ незалежні і випадкові, то абсолютна похибка результату може бути визначена за формулою

$$\Delta q = \sqrt{(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta z)^2 + (\Delta u)^2 + \ldots + (\Delta w)^2}$$

2. Якщо кінцевий результат вимірювання є добутком або часткою двох і більше виміряних значень: $q = \dfrac{x \cdot \ldots \cdot z}{u \cdot \ldots \cdot w}$

і похибки $\delta x, \ldots, \delta w$ незалежні і випадкові, то відносна похибка результату опосередкованого вимірювання визначається

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2}$$

3. Якщо результат опосередкованого вимірювання є функцією однієї величини: $q = f(x)$

то похибка результату визначається

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x$$

4. В загальному випадку похибка функції декількох величин

$$q = f(x, y, \ldots, w)$$

похибки яких незалежні і випадкові, знаходиться

$$\delta q = \sqrt{\left( \frac{\partial q}{\partial x} \delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial q}{\partial y} \delta y \right)^2 + \ldots + \left( \frac{\partial q}{\partial w} \delta w \right)^2}$$

## Приклад. Обробка результатів опосередкованих вимірювань

Визначити результат та СКВ випадкової складової похибки опосередкованого вимірювання потужності ***P = U²/R*** за даними прямих вимірювань напруги та опору з незалежними випадковими похибками, що розподілені за нормальним законом:

$$U = (1.00 \pm 0.01)\text{В}; \quad P = 0.99$$

$$R = (10.0 \pm 0.10)\text{Ом}; P = 0.997$$

Записати результат згідно зі стандартною формою, вказавши довірчий інтервал, в який потрапить похибка результату опосередкованого вимірювання із встановленою ймовірністю ***P***=0.99.

1. Значення математичного очікування потужності

$$P_o = \frac{U^2}{R} = \frac{1.00}{10.0} = 0.1(\text{Вт})$$

2. СКВ результату опосередкованого вимірювання потужності

$$\sigma_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P_o}{\partial U}\right)^2 \bar{\sigma}_U^2 + \left(\frac{\partial P_o}{\partial R}\right)^2 \bar{\sigma}_R^2} = \sqrt{\left(\frac{2U}{R}\right)^2 \bar{\sigma}_U^2 + \left(-\frac{U^2}{R^2}\right)^2 \bar{\sigma}_R^2}$$

За значеннями нормованої функції Лапласа знайти значення z та визначити СКВ результатів прямих вимірювань напруги

$$\Phi(z_U)=\frac{P}{2}=\frac{0.99}{2}=0.485 \quad \Rightarrow z_U=2.2; \quad \bar{\sigma}_U=\frac{\Delta_U}{z_U}=\frac{0.01}{2.2}=0.0045\,(В)$$

$$\Phi(z_R)=\frac{P}{2}=\frac{0.997}{2}=0.499 \Rightarrow z_R=3.1; \bar{\sigma}_U=\frac{\Delta_R}{z_R}=\frac{0.1}{3.1}=0.03(Ом)$$

Значення СКВ опосередкованого вимірювання потужності складає

$$\bar{\sigma}_P=\sqrt{\left(\frac{2U}{R}\right)^2\bar{\sigma}_U^2+\left(-\frac{U^2}{R^2}\right)^2\bar{\sigma}_R^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{10}\right)^2\cdot(0.0045)^2+\left(-\frac{1}{10^2}\right)^2\cdot(0.03)^2}\approx 3\cdot 10^{-3}\,(Вт)$$

3. Границі довірчого інтервалу для заданої ймовірності P=0.99. $z_p=2.2$

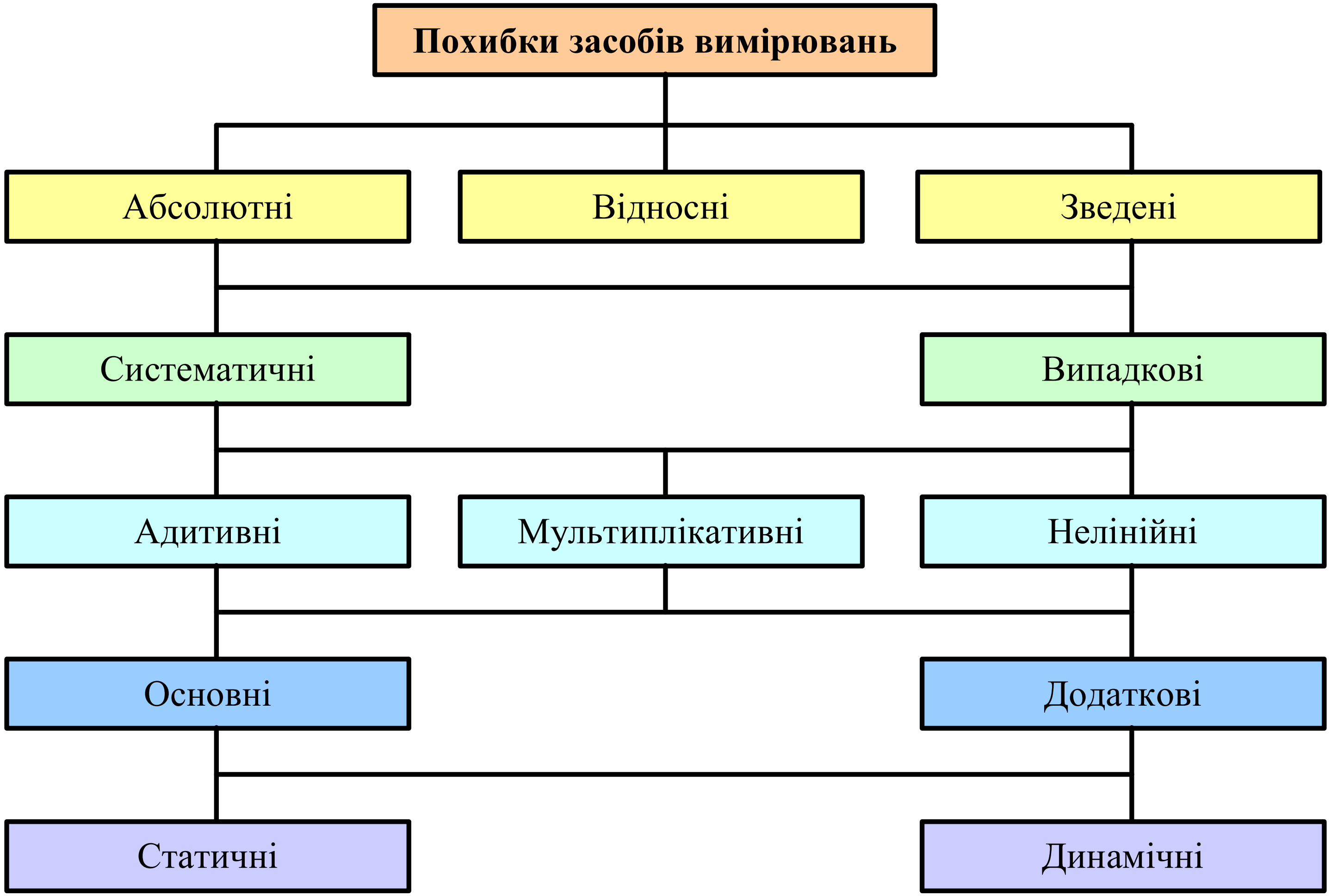
Границі довірчого інтервалу становлять $\Delta_p=\pm z_p\cdot\bar{\sigma}_{\bar{p}}=\pm 2.2\cdot 3\cdot 10^{-3}=0.0066\,(Вт)$

4. Результат опосередкованого вимірювання потужності

$$P_o=(0.1000\pm 0.0066)\ Вт;\ P=0.99$$

# *Похибки засобів вимірювань*

**Похибки засобів вимірювань дозволяють кількісно оцінити інструментальну похибку вимірювань**.



***За способом вираження*** похибки засобів вимірювальної техніки поділяють на абсолютні, відносні та зведені

**Абсолютною похибкою засобу вимірювань** називають різницю між показом засобу вимірювань та істинним значенням вимірюваної величини за відсутності методичних похибок і похибок від взаємодії засобу вимірювань з об'єктом вимірювання

$$\Delta_{зв} = X_{зв} - X_i$$

Умови відсутності методичних похибок вимірювання і похибок від взаємодії засобу вимірювань з об'єктом вимірювання створюються під час повірки.

В метрологічній практиці визначають приблизне значення похибки засобу вимірювань, тобто її оцінку.

Оцінка похибки засобу вимірювань це різниця між показом засобу вимірювань і умовно істинним значенням вимірюваної величини.

**Відносною похибкою засобу вимірювань** називають відношення абсолютної похибки засобу вимірювань до істинного значення вимірюваної величини

$$\delta_{зв}[\%] = \frac{\Delta_{зв}}{X_i} \cdot 100\%$$

**Зведеною похибкою засобу вимірювань** називають відношення абсолютної похибки засобу вимірювань до нормованого значення

$$\gamma[\%] = \frac{\Delta_{зв}}{X_н} \cdot 100\%$$

Похибки засобів вимірювань містять ряд систематичних і випадкових складових, статичні та динамічні похибки, які визначаються аналогічно визначенням похибок вимірювань.

**В залежності від типу шкали засобу вимірювань виділяють декілька методів визначення нормованого значення.**

1. Якщо засіб вимірювань має рівномірну шкалу, то в якості нормованого значення $X_H$ необхідно вибирати верхню межу вимірювань при знаходженні нульової відмітки на початку шкали.

2. Нормоване значення $X_H$ дорівнює сумі модулів меж вимірювань, якщо нульова відмітка шкали знаходиться в середині діапазону вимірювань.

3. Для багатомежевих засобів вимірювань значення $X_H$ дорівнює різниці меж вимірювань.

4. Якщо засіб вимірювань має істотно нерівномірну шкалу, то за нормоване значення приймають довжину шкали або її частини, яка відповідає діапазону вимірювань.

***Залежно від того, в яких умовах експлуатується засіб вимірювань***, розрізняють основну (для нормальних умов) і додаткову (якщо одна або більше впливних величин виходять за межі нормальних умов) похибки.

**Основна похибка** - похибка засобу вимірювальної техніки за нормальних умов його використання.

Умови застосування засобів вимірювальної техніки, за яких впливні величини мають нормальні значення чи знаходяться у границях нормального інтервалу значень, називають ***нормальними умовами застосування***.

***Нормальне - це значення впливної величини, для якого*** (у межах якого) ***нормується основна похибка засобів вимірювальної техніки.***

***Умовами застосування засобів вимірювальної техніки*** називають такі, за яких значення впливних величин знаходяться у границях робочої зони.

***Робоча зона значень впливних величин*** - це зона, що встановлюється для засобів вимірювань, в межах якої за необхідністю нормуються додаткові похибки цих засобів.

**Додаткова похибка** – похибка засобу вимірювальної техніки, яка додатково виникає під час використання засобу вимірювань в умовах відхилення хоча б однієї з впливних величин від нормального значення або її виходу за границі нормальної зони значень.

***Щоб наперед оцінити похибку, яку внесе дане устаткування в кінцевий результат, користуються нормованими значеннями похибки.***

Під ***нормованим значенням*** розуміють ***похибки***, які є граничними для даного типу засобів вимірювань.

Стандартами регламентуються способи нормування і форми вираження допустимих границь похибок.

***Границею допустимої похибки засобу вимірювань*** називають найбільше значення без урахування знаку похибки засобу вимірювань, за яким цей засіб ще може бути визнаний придатним до застосування.

Границі допустимих абсолютної, відносної і зведеної похибок засобів вимірювань можуть виражатись одним числом

$$\Delta_{\text{н}} = \pm a; \quad \delta_{\text{н}} = \pm q; \quad \gamma_{\text{н}} = \pm p$$

де ***a*** - додатне число, незалежне від x;

***q* ,  *p*** - абстрактні додатні числа, вибрані з ряду

**[1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0; 5,0;6.0] • $10^{n}$,**

**n може набувати значень 1; 0; -1; -2; ... .**

Границі допустимих абсолютної і відносної похибок можуть також виражатися у вигляді лінійної функції

$$\Delta_{\text{зв}} = \pm(a + b \cdot x)$$

***a, b*** - додатні числа, незалежні від ***x***

Перший доданок  представленої функції позначається ***Δа*** *і* ***характеризує*** **адитивну похибку** (похибку нуля, незалежну від ***х***), а другий доданок позначається ***Δм*** *і* ***характеризує*** **мультиплікативну похибку**, залежну від ***х***. Дану складову похибки  називають ще похибкою чутливості.

**Адитивна похибка** - складова абсолютної похибки засобу вимірювальної техніки, яка не залежить від вимірюваної величини.

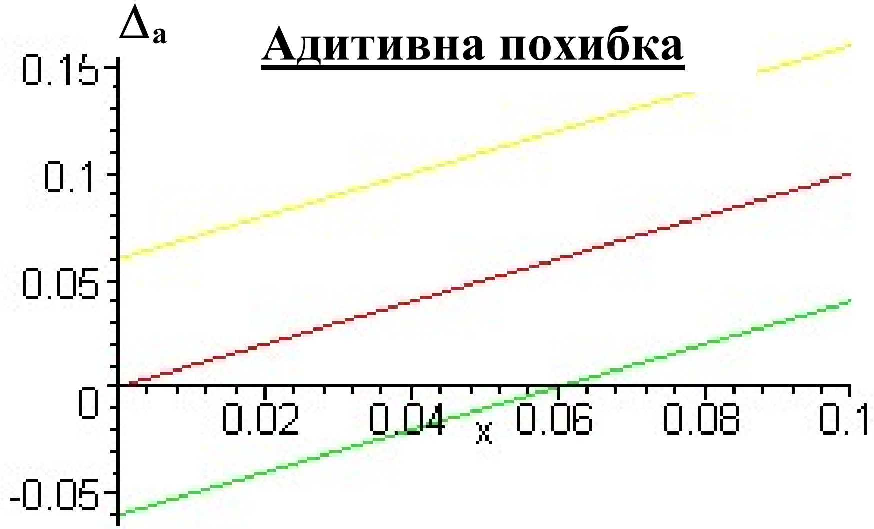
**Мультиплікативна похибка** - складова похибки засобу вимірювальної техніки, яка пропорційна вимірюваній величині.

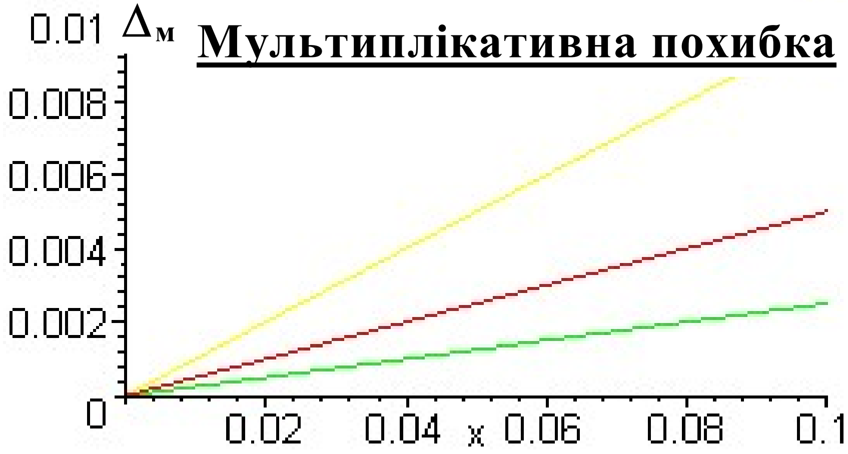
**Похибка нелінійності** - складова похибки засобу вимірювальної техніки, яка змінюється нелінійно в діапазоні зміни вимірюваної величини.

Для нормування похибок засобів вимірювальної техніки з адитивною і мультиплікативною похибками найбільш поширеною є формула виду

$$\delta_{н} = \pm\left[c + d \cdot \left(\left|X_{н} / X\right| - 1\right)\right]$$

***c, d*** - постійні числа




Якщо показання приладу, границя допустимої похибки якого нормована, дорівнює верхній межі вимірювання $\boldsymbol{X = X_H}$, то

$$\delta_H = \pm c$$

Отже **коефіцієнт *c* є границя допустимої відносної похибки при максимальному показі приладу**

Залежність для границі допустимої абсолютної похибки

$$\Delta_{н} = \pm \frac{1}{100} \cdot \left[ d \cdot X_{н} + (c - d) \cdot X \right]$$

Якщо покази приладу рівні нулю, другий доданок у квадратних дужках дорівнює нулю. Отже **коефіцієнт *d* є межа допустимої похибки при нульовому показі приладу, яка виражена у відсотках до верхньої межі вимірювання**.

**Різниця коефіцієнтів (*c* – *d*) характеризує зростання абсолютної похибки при зростанні показів приладу**

**Відношення $X_{н}/X - 1$ характеризує зростання відносної похибки при зменшенні показів приладу.**

# *Метрологічні характеристики засобів вимірювань*

**Метрологічні характеристики** - технічні характеристики засобів вимірювальної техніки, що впливають на результати і похибки вимірювань.

Від точності характеристик при виготовленні засобів вимірювань, стабільності їх в процесі експлуатації залежить точність результатів вимірювань.

Метрологічні характеристики, які встановлюються нормативно-технічною документацією (НТД) ***називаються нормованими***. Залежно від виду, призначення, умов застосування засобів вимірювальної техніки нормується певний комплекс характеристик.

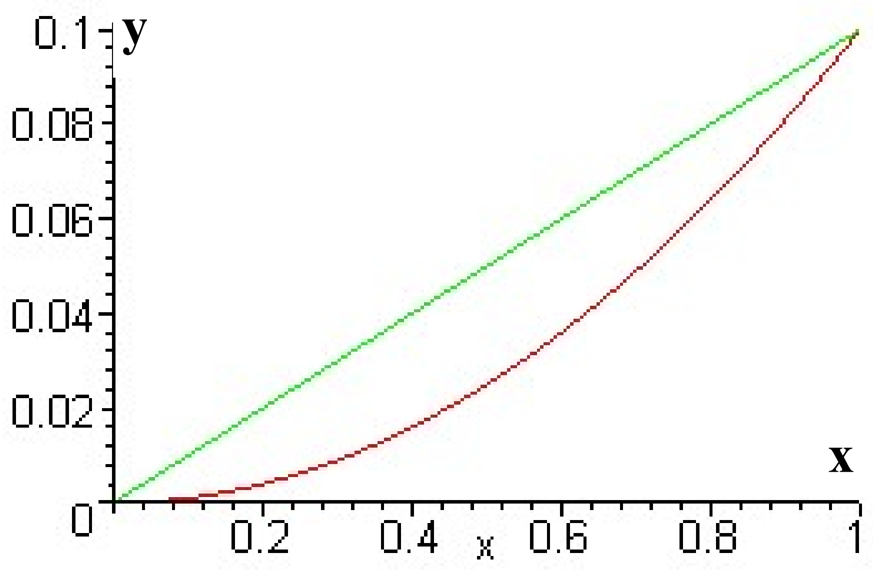
**Функція перетворення вимірювального приладу** (градуювальна характеристика, рівняння перетворення) - залежність між вихідним сигналом приладу ***Y*** і його вхідним сигналом ***X***:

$$Y = f(X)$$

Функція перетворення, яку повинен мати вимірювальний прилад, за певних (нормальних) умовах зовнішнього середовища і незмінних значеннях вхідного сигналу (або таких, що повільно змінюються) називається ***номінальною статичною характеристикою перетворення.*** Ця функція може бути представлена аналітично, графічно або у вигляді таблиці.

Ідеальна функція перетворення представляє лінійну залежність, але під дією тих чи інших причин вона може змінювати свій вигляд.

Функція перетворення пов'язує конструктивні параметри приладу з величинами ***X*** і ***Y***.




Графічне подання функції перетворення називають **статичною характеристикою**

**Чутливість вимірювального приладу** - характеризує здатність приладу реагувати на зміни вхідного сигналу. Чутливість визначається з рівняння перетворення і являє собою відношення зміни сигналу ***ΔY*** на виході приладу до викликає його зміни сигналу ***ΔX*** на вході приладу

$$S = \Delta Y / \Delta X$$

При лінійному рівнянні перетворення $S = Y / X$

Відносна чутливість:

$$S = \frac{\Delta Y}{Y} / \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta Y \cdot X}{\Delta X \cdot Y}$$

**Поріг чутливості** - зміна вхідного сигналу, що викликає найменшу зміну вихідного сигналу, яка може бути виявленою спостерігачем за допомогою даного приладу без додаткових пристроїв. Поріг чутливості визначає фактичну роздільну здатність вимірювального приладу.

**Зона нечутливості** - діапазон значень вимірюваної величини, в межах якого її зміни не викликають зміни показу засобу вимірювань.

**Ціна поділки шкали вимірювального приладу** (або постійна приладу) - різниця значень величин, що відповідають двом сусіднім позначкам шкали. Вона пов'язана з чутливістю залежністю

$$C = 1 / S = \Delta X / \Delta Y$$

Чутливість і ціна поділки - величини іменовані. Зазвичай говорять про чутливості приладу якийсь величині (напрузі, струму, опору тощо).

**Наприклад, *S* = 5 под./В; *C* = 0,2 В/под.**

**Діапазон вимірювань** - область значень вимірюваної величини, для якої нормовані допустимі похибки засобів вимірювань. Ця область обмежена ***межами вимірювань*** - найбільшим і найменшим значеннями діапазону вимірювань. Діапазон вимірювань може складатися з декількох піддіапазонів з різними похибками.

**Показ** - значення величини, що визначається за відліковим пристроєм приладу і виражене в прийнятих одиницях цієї величини.

**Діапазон показів** - область значень, обмежена початковим і кінцевим значеннями шкали (може не збігатися з діапазоном вимірювань).

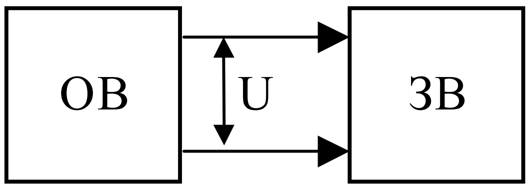
**Варіація показів** - найбільша можлива різниця між окремими повторними показами приладу, відповідними одному і тому ж дійсному значенню вимірюваної величини при незмінних зовнішніх умовах. ***Варіація характеризує стійкість показань приладу.***

У вимірювальній практиці широко використовується також термін "***повний діапазон***", під яким розуміють відношення верхньої межі вимірювання  до порогу чутливості

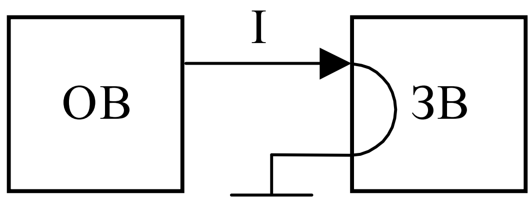
$$D = \frac{x_{max}}{X_{п}}$$

**Вхідний і вихідний опір.** При вимірюванні об’єкт і засіб вимірювання взаємодіють. Однак при такій взаємодії вимірювальна інформація, що отримується від об'єкта вимірювання, не повинна спотворюватись. У цьому плані засоби вимірювання характеризуються вхідним і вихідним опорами (імпедансами).

Вхідний опір може бути як великим, так і малим, в залежності від властивостей об’єкта, умов вимірювання, значення вимірюваної величини і методу вимірювання.




$R_{вх} \to \infty$




$R_{вх} \to 0$

***Великий вхідний опір*** необхідний тоді, коли вихідний сигнал від попереднього перетворювача або об'єкта вимірювання формується у вигляді напруги (**вимірювання напруги вольтметром**). Чим більшим буде опір вольтметра, тим меншою буде похибка взаємодії.

***Малий вхідний опір*** необхідний тоді, коли вихідний сигнал від попереднього перетворювача або об'єкта вимірювання формується у вигляді струму. При **вимірюванні сили струму амперметром** похибка взаємодії буде тим меншою, чим менший його вхідний опір .

**Вид вихідного коду** - число розрядів коду (ціна одиниці найменшого розряду коду приладу), призначене для видачі результатів в цифровому вигляді.

**Область робочих частот** - смуга частот, в межах якої похибка приладу, викликана зміною частоти, не перевищує допустимої межі.

**Швидкодія** - час, що витрачається на один вимір.

***Для аналогових приладів*** швидкодія визначається часом встановлення показів (часом заспокоєння) - проміжком часу з моменту зміни вимірюваної величини до моменту встановлення показів приладу.

***Для цифрових приладів*** швидкодія визначається як відношення числа вимірювань ***n*** за деякий проміжок часу ***t*** до цього проміжку часу:

$$B = n / t$$

## ***Клас точності***

***Узагальненою характеристикою засобу вимірювальної техніки є клас точності***, що визначається границями його допустимих основної і додаткових похибок, а також іншими характеристиками, що впливають на його точність, значення яких регламентується.

Клас точності характеризує точність засобу вимірювань, але не є безпосередньою характеристикою точності вимірювання, виконаного за допомогою даного засобу вимірювань.

***В основу присвоєння класу точності береться основна похибка засобу вимірювань і спосіб її вираження.*** Якщо основна похибка виражається в одиницях вимірюваної величини або в поділках шкали, то класи точності позначають порядковими номерами. Номери визначаються відповідними стандартами.

Залежно від ступеня точності показів вимірювальні прилади поділяються на класи, що позначаються відповідно числами:

**0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0**

1) ***Для засобів вимірювання, відлікові пристрої яких градуюються у логарифмічних одиницях, позначення класів точності збігається з граничними значеннями допустимих похибок.***

**Наприклад, якщо границя допустимої похибки становить ±1 дБ, то клас точності позначають: Кл. 1,0 дБ.**

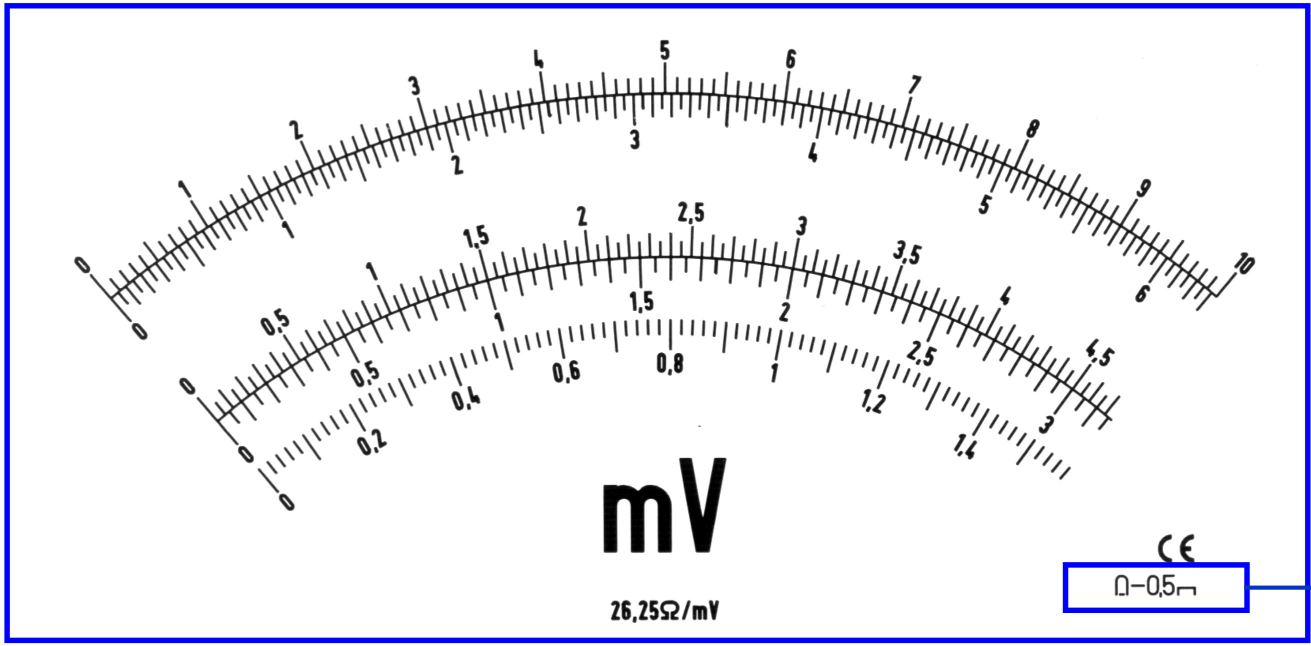
2) ***Якщо границі допустимої основної похибки задаються відносною або зведеною похибкою, то позначення класів точності вибирають із наведеного раніше ряду***.

3) ***Якщо границі допустимої основної похибки залежать від значення вимірюваної величини:***

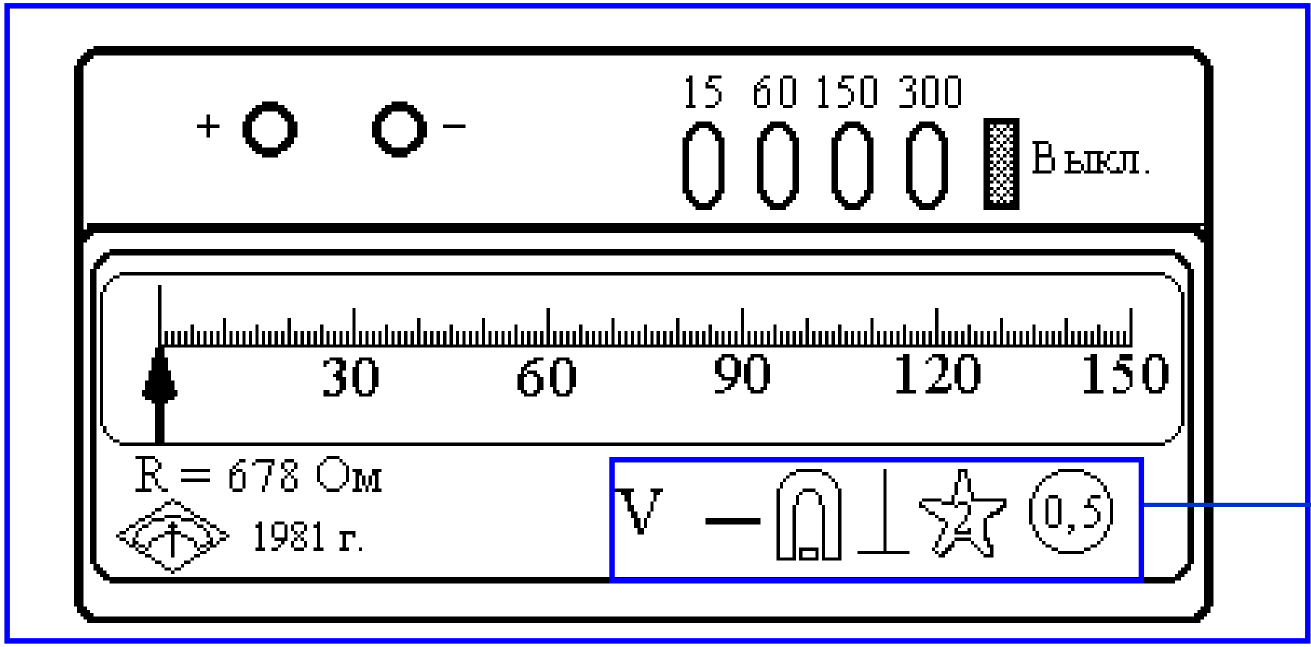
$$\delta = \pm[c + d \cdot (|X_k / X| - 1)]$$

***клас точності позначають дробом c / d***

**Наприклад, при значеннях c=0.02 і d=0.01 клас точності приладу буде позначено: 0.02/0.01.**




***клас точності визначається зведеною похибкою***




***клас точності визначається відносною похибкою***

Для характеристик точності засобу вимірювань можна застосувати **коефіцієнт точності**, який визначається відношенням абсолютної похибки до його поля допуску

$$K_T = \Delta / \Delta_{ПД}$$

Щоб оцінити точнісні характеристики сукупності засобів вимірювань, можна застосувати **коефіцієнт відносної точності**, що являє собою відношення середнього квадратичного відхилення вимірюваної величини до його поля допуску

$$K_B = \sigma / \Delta_{ПД}$$

**Поле допуску** - поле, обмежене найбільшим і найменшим граничними розмірами, яке визначається величиною допуску і його положенням відносно номінального розміру. У разі графічного зображення поле допуску міститься між двома лініями, що відповідають верхньому та нижньому відхиленням відносно нульової лінії

***Як показники точності засобів вимірювань можна також застосовувати:***

а) інтервал, у якому похибку вимірювання знаходять із заданою ймовірністю;

б) інтервал, у якому систематичну складову похибки вимірювання знаходять із заданою ймовірністю;

в) числові характеристики систематичної складової похибки;

г) числові характеристики випадкової складової похибки;

д) функцію розподілу складової похибки.

## *Основні значення вимірюваних напруг і струмів*

**Найбільш часто вимірюють напруги, рідше — струми.** Це пояснюється насамперед тим, що для вимірювання струму вимірювальний ланцюг необхідно розривати, що не завжди можливо або бажано, і навпаки, вимірювання напруги можна проводити без порушення цілісності вимірюваного електричного кола.

Вимірювані електричні сигнали це складні функції часу. Тому для аналізу і порівняння різних сигналів прагнуть використовувати такі їх значення, які характеризували б сигнали будь-якої форми.

**Найбільшого розповсюдження одержали наступні значення (параметри) напруг і струмів:**

- **амплітудне,**
- **середнє,**
- **середньо випрямлене,**
- **середньоквадратичне.**

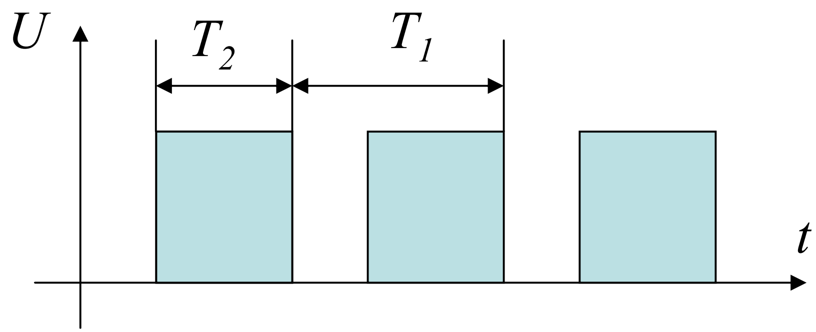
**Амплітудне (пікове) значення** це - найбільше або найменше миттєве значення змінної складової сигналу за час вимірювання:

$$U_m = \max_T \{U(t)\}$$

$\max\limits_T$ — операція знаходження максимального значення сигналу на інтервалі вимірювання ***T***

**Середнє значення (постійна складова) напруги** — це постійна складова сигналу ***U(t)*** за час $\boldsymbol{T_1}$, що визначається виразом:

$$U_{\text{ср}} = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_2} U(t)$$




$T_1$ — час спостереження або період електричного коливання;

$T_2$ — час дії вимірюваної напруги.

## Середньо випрямлене значення напруги:

$$U_{\text{св}} = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_2} \left|U(t)\right|$$

Операція знаходження середніх випрямлених значень здійснюється за допомогою двонапівперіодного детектора середньо випрямлених значень. Відмітимо, що для однополярних сигналів $\boldsymbol{U_{ср}}$ і $\boldsymbol{U_{св}}$ рівні між собою

**Середньоквадратичне значення напруги** — це корінь квадратний із середнього значення квадрата напруги:

$$U_{\text{ск}} = \sqrt{\frac{1}{T_1}\int_0^{T_2} U^2(t)dt}$$

Середньоквадратичне значення періодичного сигналу складної форми може визначатися також як сума квадратів постійної складової і середньоквадратичних значень окремих гармонік

$$U_{\text{ск}} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + .... + U_n^2}$$

Постійну складову і гармоніки знаходять, як відомо, шляхом розкладання складної функції часу ***U(t)*** у ряд Фур’є.

Пікове, середньоквадратичне і середньо випрямлене значення напруг сигналів будь-якої форми зв’язані між собою коефіцієнтами амплітуди $\boldsymbol{K_a}$, форми $\boldsymbol{K_\phi}$ і усереднення $\boldsymbol{K_y}$

$$K_{\text{а}} = \frac{U_m}{U_{\text{ск}}} \qquad K_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{ск}}}{U_{\text{св}}} \qquad K_{\text{у}} = K_{\text{а}} K_{\text{ф}}$$