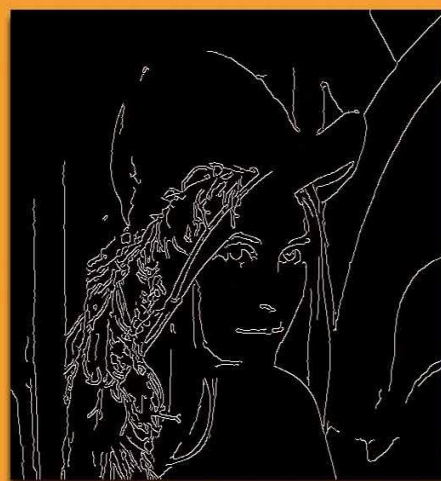


ВОВК С.М., ГНАТУШЕНКО В.В., БОНДАРЕНКО М.В.



МЕТОДИ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА КОМП'ЮТЕРНИЙ ЗІР



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Вовк С.М., Гнатушенко В.В., Бондаренко М.В.

Методи обробки зображень та комп'ютерний зір

Ухвалено вченою радою університету як навчальний посібник

Дніпропетровськ
ЛІРА
2016

УДК 004.9:621.391
ББК 32.972.131.2я7
В61

Рецензенти:

Декан факультету інформаційних технологій, завідувач кафедри програмного забезпечення комп'ютерних систем ДВНЗ «Національний гірничий університет» (м. Дніпропетровськ), д-р техн. наук, проф. Алексєєв М.О.

Професор кафедри інформаційних технологій видавничої справи Інституту комп'ютерних наук та інформаційних технологій НУ «Львівська політехніка», д-р техн. наук, проф. Пелешко Д.Д.

Професор кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Одеського національного політехнічного університету, д-р техн. наук, проф. Крилов В.М.

Вовк С.М.

В61 Методи обробки зображень та компютерний зір : навч. посіб. / С.М. Вовк, В.В. Гнатушенко, М.В. Бондаренко. – Д. : ЛІРА, 2016. – 148 с.
ISBN 978-966-383-699-7

Розглянуто теоретичні та практичні аспекти використання методів цифрової обробки зображень та комп'ютерного зору. Висвітлено способи математичного опису зображень, методи просторової фільтрації зображень, методи відновлення зображень, методи морфологічної обробки бінарних зображень та методи комп'ютерного зору для визначення відстані до об'єктів та їх лінійних розмірів.

Призначено для студентів комп'ютерних спеціальностей.

УДК 004.9:621.391
ББК 32.972.131.2я7

ISBN 978-966-383-699-7

© Вовк С.М., Гнатушенко В.В., Бондаренко М.В., 2016
© ЛІРА, 2016

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ВСТУП | 5 |
| РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЗОБРАЖЕНЬ | 8 |
| 1.1. Основні відомості | 9 |
| 1.2. Імовірнісний опис зображень | 12 |
| 1.3. Приклади аналітичних розрахунків просторового спектра | 16 |
| 1.3.1. Розрахунок просторового спектра точкового джерела | 17 |
| 1.3.2. Розрахунок просторового спектра джерела у формі відрізка нескінченно тонкої нитки..... | 17 |
| 1.3.3. Розрахунок просторового спектра джерела у формі прямокутника..... | 18 |
| 1.3.4. Розрахунок просторового спектра джерела у формі круга..... | 18 |
| 1.4. Особливості чисельних розрахунків..... | 19 |
| Контрольні питання | 21 |
| Лабораторна робота № 1 | 24 |
| Література..... | 31 |
| Додаток 1.1 | 32 |
| РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПРОСТОРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ | 34 |
| 2.1. Загальні відомості | 35 |
| 2.2. Лінійна просторова фільтрація | 36 |
| 2.3. Нелінійна просторова фільтрація | 47 |
| 2.3.1. Нелінійні усереднювальні фільтри | 48 |
| 2.3.2. Фільтри на порядкових статистиках | 50 |
| 2.3.3. Медіанна фільтрація | 53 |
| Контрольні питання | 57 |
| Лабораторна робота № 2 | 58 |
| Література..... | 62 |
| РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ..... | 63 |
| 3.1. Загальні відомості | 65 |
| 3.2. Лінійні методи відновлення зображень..... | 71 |
| Контрольні питання | 75 |
| Лабораторна робота № 3 | 77 |
| Література..... | 79 |
| Додаток 3.1 | 80 |
| Додаток 3.2 | 82 |

| | |
|---|---------|
| РОЗДІЛ 4. МОРФОЛОГІЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ БІНАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ | 84 |
| 4.1. Основні поняття й операції математичної морфології | 85 |
| 4.1.1. Загальні відомості | 85 |
| 4.1.2. Операції над множинами в евклідовому просторі..... | 88 |
| 4.1.2.1. Основні визначення | 88 |
| 4.1.2.2. Додавання множин за Мінковським | 89 |
| 4.1.2.3. Дилатація множини | 91 |
| 4.1.2.4. Віднімання множин за Мінковським | 93 |
| 4.1.2.5. Ерозія множини..... | 94 |
| 4.1.2.6. Заповнення і поповнення множин | 96 |
| 4.1.2.7. Операція порівняння множини..... | 99 |
| 4.1.2.8. Операція підстановки множини | 100 |
| 4.2. Алгоритми обробки бінарних зображень..... | 101 |
| 4.2.1. Алгоритм дилатації | 101 |
| 4.2.2. Алгоритм ерозії | 104 |
| 4.2.3. Алгоритми заповнення і поповнення. Морфологічні фільтри | 107 |
| 4.2.4. Алгоритм порівняння..... | 110 |
| 4.2.5. Алгоритм символної підстановки..... | 111 |
| 4.2.6. Виділення границь зображення | 112 |
| 4.2.7. Виділення зв'язних компонент | 114 |
| 4.2.8. Морфологічне стоншення і стовщення..... | 115 |
| Контрольні питання | 116 |
| Лабораторна робота № 4 | 118 |
| Література..... | 122 |
| Додаток 4.1 | 124 |
| РОЗДІЛ 5. КОМП'ЮТЕРНИЙ СТЕРЕОЗІР | 126 |
| 5.1. Основи стереоскопічних вимірювань..... | 132 |
| 5.2. Програмна реалізація стереоскопічних вимірювань..... | 140 |
| Контрольні питання | 143 |
| Лабораторна робота № 5 | 145 |
| Література..... | 146 |
| Додаток 5.1 | 147 |

ВСТУП

Сучасний етап розвитку інформаційних технологій характеризується розробкою, створенням та широким впровадженням відеоінформаційних технологій, що засновані на обробці та використанні зображень. На даний час актуальність відеоінформаційного напрямку здебільшого обумовлена потребами розвитку штучних інтелектуальних систем, які повинні мати можливості з візуальної орієнтації у просторі та є придатними до візуального аналізу сцен, візуального пошуку нерухомих та/або рухомих об'єктів з оцінюванням їх геометричних форм й кількісних характеристик. Такі можливості є важливими споживчими рисами для інтелектуальних систем не лише промислового, але й звичайного побутового призначення. З урахуванням сучасних викликів та тенденцій можна очікувати подальшого масштабного розвитку відеоінформаційного напрямку. У зв'язку з цим перед студентами комп'ютерних спеціальностей, зокрема спеціальності 122 «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», постають задачі отримання достатніх знань з теоретичних основ та методів обробки зображень та комп'ютерного зору, придбання практичних навичок та формування професійних умінь з розробки, імплементації та використання відповідних методів, алгоритмів та програмного забезпечення. Поданий навчальний посібник був написаний з метою допомогти студентам засвоїти основний теоретичний матеріал та закріпити свої знання шляхом виконання лабораторних робіт.

При написанні навчального посібника автори, що працюють на кафедрі автоматизованих систем обробки інформації (АСОІ) Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара, спиралися як на власний багаторічний науково-дослідний і педагогічний досвід, так і на праці інших відомих вчених у галузі цифрової обробки сигналів, розпізнавання образів і комп'ютерної графіки. Кафедра АСОІ є випускаючою, багато років вона забезпечує підготовку бакалаврів за напрямом 6.050101 «Комп'ютерні науки» та спеціалістів і магістрів за спеціальністю 7.05010101, 8.05010101 «Інформаційні управляючі системи та технології (за галузями)».

Навчальний посібник складається з п'яти розділів. Кожен розділ містить загальні теоретичні відомості й доповнюється контрольними

питаннями та завданнями до лабораторної роботи. Наприкінці кожного розділу наведено посилання на літературні джерела, в яких можна знайти більш розширене викладення розглянутих питань. Для кращого розуміння завдань до лабораторних робіт і з метою поліпшення якості їх подальшого виконання в усіх розділах посібника наведено фрагменти програмного коду та/або приклади відповідної обробки зображень.

У першому розділі посібника розглянуто питання детермінованого та імовірнісного опису зображень у просторовій та просторово-частотній областях, наведено необхідні визначення, а також прості приклади аналітичних розрахунків просторового спектра й їх особливості. Завдання до лабораторної роботи передбачають опрацювання питань з побудови математичних моделей напівтонових зображень у просторовій і просторово-частотній областях для випадку суперпозиції простих «ідеальних» об'єктів, аналіз просторового спектра зображень друкованих символів, синтез зображень за частиною просторового спектра, побудову математичних моделей простих кольорових зображень та моделювання випадкових зображень за заданими законами розподілу імовірності.

У другому розділі посібника розглянуто питання фільтрації зображень. Спочатку наведено загальні відомості, а потім розглянуто методи лінійної та нелінійної просторової фільтрації. Серед методів лінійної просторової фільтрації зазначено методи низько-частотної просторової фільтрації, які дозволяють сгладжувати адитивний шум на зображенні, та методи виділення границь зображень об'єктів, які побудовані на основі псевдодиференціальних операторів. Серед методів нелінійної просторової фільтрації зазначено методи нелінійної усереднювальної фільтрації, методи фільтрації на основі порядкових статистик та методи медіанної та комбінованої медіанної фільтрації.

У третьому розділі посібника розглянуто лінійні методи відновлення тих зображень, що спотворені лінійною інваріантною до просторового зсуву системою. В межах цієї моделі системи, коли зображення на її виході є згорткою її двовимірної функції розсіювання точки та зображення на її вході, подано клас добре відомих відновлювальних фільтрів, що розгортається від інверсного фільтра (який, на жаль, не є практично уживаним через значне підсилення шуму) до узагальненого фільтра Вінера

та еволюційного фільтра, які залежать від двох та трьох параметрів, що налаштовуються. В лабораторній роботі запропоновано два завдання з відновлення спотворених зображень, які розмиті за рахунок недосконалості системи формування зображень з гауссівською функцією розсіювання точки та за рахунок відносного руху камери й об'єкта зйомки.

У четвертому розділі посібника подано теорію методів математичної морфології, яка заснована на теорії множин в евклідовому векторному просторі, та її застосування для обробки бінарних зображень. Розглянуто основні операції математичної морфології, а саме: операції додавання та віднімання за Мінковським, операції дилатації, ерозії, заповнення, поповнення, символної підстановки та інші. На основі цих операцій наведено алгоритми виділення границь, порівняння, пошуку зв'язних компонентів, стоншення та потовщення. В лабораторній роботі запропоновано три завдання з моделювання операцій дилатації, ерозії, заповнення і поповнення, з виділення границь на бінарному зображенні та з підрахунку числа об'єктів на трьох зображеннях, якими є бінарне зображення тексту, штучне бінарне зображення множини геометричних фігур різної форми і розмірів та напівтонове зображення з природною сценою, що складається з множини приблизно однакових за формою об'єктів (наприклад, зерна рису чи еритроцити).

П'ятий розділ посібника подає базові співвідношення щодо розрахунку відстані до об'єкта, який одночасно візуально спостерігається двома камерами з паралельними оптичними осями, у наближенні геометричної оптики. Лабораторна робота передбачає застосування простого вимірювального приладу, що складається з двох веб-камер (стереопари), розташованих на певній відстані одна від одної, а завдання до лабораторної роботи спрямовані на опрацювання питань суміщення зображень зі стереопари, визначення відстані до об'єктів зйомки, оцінювання геометричних розмірів об'єктів та оцінювання просторової орієнтації плоских протяжних об'єктів.

Автори висловлюють вдячність тим, хто допомагав їм у роботі над посібником, а також студентам, які виконали тестування лабораторних завдань.

РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЗОБРАЖЕНЬ

У фахівців не існує єдиної думки щодо загального визначення поняття "зображення" [1]. Надалі під терміном "зображення" будемо розуміти *візуальне зображення*, а саме все те, що можна побачити оком чи зареєструвати системою штучного зору.

Зображення можна представити різними способами, які варто поділити на неформалізовані та формалізовані. Неформалізованими є способи представлення зображень фотографіями, слайдами, фільмами, картинами, малюнками й іншими фізичними носіями розподілу яскравості та кольору, зокрема, штриховим чи растровим друком на папері, на екрані і т.ін. Дані способи подають зображення природно, неформально і призначені для безпосереднього пред'явлення зображень людині чи системі штучного зору. Вони не дозволяють проводити розробку й аналіз систем обробки зображень і тому далі розглядатися не будуть. Формалізовані способи представлення зображень мають за мету одержання певних математичних моделей зображень, які можна піддавати аналізу й вивчати. Одним із способів формалізованого представлення є спосіб математичного опису *функціональною залежністю*. Він полягає в заданні однозначної функції, яка кожному значенню свого аргументу зіставляє одне певне значення; самі значення аргументів та функції можуть виражатися цілими або дійсними числами, впорядкованими парами таких чисел, трійками тощо. Якщо область визначення й область значень даної функції є скінченними множинами, то таку функцію можна задати способом *переліку*, вказуючи впорядковані пари (*аргументи, значення*), що приводить до формалізованого представлення зображення у вигляді таблиці (таблиць) чисел. Цей спосіб є зручним для представлення цифрових зображень [2]. Інші способи формалізованого представлення зображень впливають з певних математичних теорій і зазвичай призначені для рішення окремих задач обробки зображень. Так, для рішення задач аналізу зображень може застосовуватися символічний опис зображень [3]; для рішення задач аналізу сцен – опис зображень у термінах теорії формальних граматик [3]; для рішення задач обробки бінарних зображень – опис зображень як множин, що задані у векторному просторі [4], тощо. Надалі будемо розглядати тільки спосіб опису зображень функціональною залежністю як найбільш загальний спосіб формалізованого представлення зображень.

1.1. Основні відомості

Будь-яке зображення можна описати векторною функцією в певному N -вимірному лінійному просторі [5]. Компонентами даної векторної функції звичайно є тривимірні скалярні дійсні функції просторових координат x , y та часу t . Наприклад, для зображень, отриманих за допомогою спектрозональних систем, розмірність N лінійного простору дорівнює числу спектральних зон [2]. Такі спектрозональні зображення описують векторною функцією виду:

$$\vec{f}(x, y, t) = f_1(x, y, t) \vec{i}_1 + f_2(x, y, t) \vec{i}_2 + \dots + f_N(x, y, t) \vec{i}_N \quad , \quad (1.1)$$

де $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_N$ – орти (одиничні вектори) N -вимірного лінійного простору, що визначають спектральні зони зображення; $f_i(x, y, t)$; $i = 1, \dots, N$ – тривимірні дійсні функції аргументів x , y , t . Формула (1.1) вказує, що будь-яке значення векторної функції $\vec{f}(x, y, t)$ являє собою впорядковану N -ку дійсних чисел.

Кольорове зображення описують тривимірною векторною функцією в обраній системі координат кольору, наприклад, у RGB-координатній системі:

$$\vec{f}(x, y, t) = f_R(x, y, t) \vec{r} + f_G(x, y, t) \vec{g} + f_B(x, y, t) \vec{b} \quad , \quad (1.2)$$

де $\vec{r}, \vec{g}, \vec{b}$ – орти тривимірного кольорового куба [3], що відповідають червоній (R – red), зеленій (G – green) і синій (B – blue) компонентам кольору. З (1.2) видно, що значення векторної функції $\vec{f}(x, y, t)$ залежать від аргументів x , y , t та належать тривимірному лінійному векторному простору, тобто являють собою впорядковані трійки дійсних чисел. Слід зазначити, що для опису кольорового зображення можуть використовуватися й інші кольорові координатні системи [3, 6], які при рішенні певних задач дозволяють досягти переваг у порівнянні з RGB-координатною системою. Але на практиці найбільш часто використовується саме RGB-координатна система.

З представлень (1.1) і (1.2) випливає, що просторово-часова обробка спектрозональних і кольорових зображень зводиться до просторово-

часової обробки їх кожної компоненти. Наприклад, просторово-часова обробка кольорового зображення може виконуватися за схемою, наведеною на рис. 1.1. Якщо просторово-часова обробка кожної компоненти не залежить від аналогічної обробки інших компонент, то вона може виконуватися паралельно іншим.

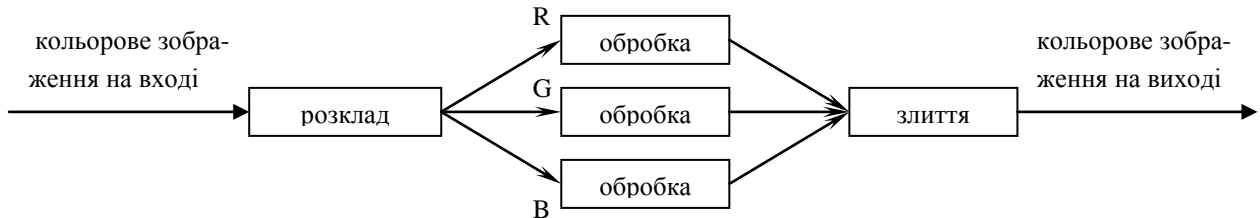


Рис. 1.1. Схема просторово-часової обробки кольорового зображення

Крім просторово-часової обробки, існують й інші види обробки спектрональних і кольорових зображень, що засновані на спільній обробці двох чи більше компонент зображення. Але просторово-часова обробка є основним і найбільш важливим видом [1–7].

Для опису однокольорового (монохроматичного) зображення використовують лише скалярну функцію, покладаючи розмірність лінійного простору $N=1$.

Надалі обмежимося випадком статичних однокольорових зображень, видаляючи із розгляду залежність зображення від часу t . Зображення, які описуються відповідними скалярними двовимірними функціями, будуть позначатися $f(x,y)$, де $f(x,y)$ – дійсна функція просторових координат x, y . Значення функції $f(x,y)$ у кожній просторовій точці (x,y) називають яскравістю зображення чи тоном, а власне саме таке зображення – напівтоновим. Якщо функція $f(x,y)$ може приймати лише два можливих значення, то відповідне їй зображення називають бінарним.

Якщо змінні x, y і значення функції $f(x,y)$ змінюються неперервно, то відповідне зображення називають аналоговим, чи неперервним. Якщо змінні x, y є дискретними, а значення функції $f(x,y)$ є неперервними, то відповідне зображення називають дискретним, причому замість $f(x,y)$ використовують позначення $f(m,n)$ чи $f_{m,n}$, де m, n – цілі числа, що відповідають точкам просторової дискретизації на координатній площині xOy . Якщо дискретне зображення є дискретним і за яскравістю, причому яскравість може приймати значення тільки зі скінченної множини значень,

то його називають цифровим. Перехід від аналогового зображення до дискретного зображення і назад може бути виконано без втрат (якщо виконуються умови теореми Котельникова – Шеннона про частоту взяття просторових відліків [2]). Але перехід від аналогового зображення до цифрового зображення і назад практично завжди пов'язаний із втратами через нелінійність операції дискретизації яскравості зображення. Ці втрати можна тільки зменшити за рахунок збільшення кількості рівнів квантування яскравості.

Клас функцій, що описують неперервні напівтонові зображення, часто звужують. Так, звичайно вимагають, щоб функція $f(x,y)$ задовольняла таким умовам [5]: 1) мала “гарну” поведінку (наприклад, була аналітичною функцією); 2) була обмеженою функцією, тобто $0 \leq f(x,y) \leq A < \infty$ для усіх x, y з області визначення функції. Якщо перша умова відбиває вимогу до “гладкості” зображення, то друга пов'язана з тим, що енергія джерела світлового випромінювання є пропорційною до квадрата амплітуди електричної компоненти електромагнітного поля і тому являє собою невід’ємну величину [2].

Існують різні класи задач просторової обробки напівтонових зображень [1–7]; серед них важливе місце займають задачі просторового аналізу та просторового синтезу зображень.

Задача просторового *аналізу* зображень полягає в одержанні *опису* зображення через набір заданих просторових ознак [2, 3]. Для цього досить часто використовують опис зображень через набір просторових гармонік. Для одержання набору просторових гармонік напівтонове зображення розкладають у ряд Фур'є [1–3].

Задача просторового *синтезу* зображень протилежна задачі просторового аналізу і полягає в побудові зображення за заданим набором просторових ознак. Наприклад, за заданим набором просторових гармонік можна синтезувати відповідне напівтонове зображення.

Неперервне напівтонове зображення можна адекватно і без втрати інформації описати його просторовим спектром. Для отримання просторового спектра неперервного напівтонового зображення використовують пряме двовимірне перетворення Фур'є (ПФ):

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy, \quad (1.3)$$

де $\omega_x=2\pi\nu_x$ і $\omega_y=2\pi\nu_y$ – циклічні просторові частоти; ν_x і ν_y – звичайні просторові частоти, які мають фізичну розмірність [1/м]; $F(\omega_x, \omega_y)$ – комплексна двовимірна функція, яку представляють її реальною та уявною частинами, або її модулем та фазою. Реальна та уявна частини, а також модуль та фаза просторового спектра є *двовимірними* функціями аргументів ω_x і ω_y .

Обернене двовимірне ПФ дозволяє отримати неперервне напівтонове зображення за заданим просторовим спектром. Обернене двовимірне ПФ є:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y . \quad (1.4)$$

Інтегральні перетворення (1.3), (1.4) є лінійними. Це означає, що при їх застосуванні виконується принцип суперпозиції. Зокрема, ПФ від суми двох напівтонових зображень дорівнює сумі ПФ від кожного зображення. Перетворення (1.3) і (1.4) мають також набір спеціальних властивостей, які у більшості випадків аналогічні властивостям одновимірних ПФ [2].

При застосуванні перетворень (1.3), (1.4) варто враховувати таке. Якщо напівтонове зображення є обмеженим у просторі, то його просторовий спектр не є обмеженим у просторово-частотній області. Це означає, що за умови строгої просторової фінітності функції $f(x, y)$ будуть відсутні ненульові за площею області просторових частот, на яких функція $F(\omega_x, \omega_y)$ тотожно дорівнює нулю. Аналогічно, якщо просторовий спектр напівтонового зображення є обмеженим у просторово-частотній області, то саме зображення є необмеженим у просторі. Також на основі поняття періодичного повторення двовимірної функції [2] можна встановити, що напівтонове зображення, яке періодично повторюється у просторі, має дискретний просторовий спектр. І навпаки, якщо просторовий спектр зображення є дискретним, то зображення буде періодично або майже періодично повторюватися у просторі.

1.2. Імовірнісний опис зображень

З інформаційної точки зору усі зображення можна поділити на два класи: детерміновані та випадкові. Детермінованими називають такі

зображення, про які заздалегідь відомо *усе*. Це означає, що будь-яке значення функції, яка описує таке зображення, апріорно відоме або може бути передбачене з імовірністю, що дорівнює одиниці. Детерміновані зображення не мають корисної інформації і їх звичайно використовують як еталони.

Випадковими називають зображення, значення яких заздалегідь невідомі і можуть бути тільки передбачені з імовірністю, що є меншою за одиницю. Усі реальні зображення варто вважати випадковими. Причинами цього можуть бути як випадковий характер безпосередньо джерела зображення, так і випадковий характер процесу формування зображення, а також наявність шуму на зображенні. Будь-яке зображення, що має в собі корисну інформацію, повинне розглядатися як випадкове.

Для опису детермінованих зображень використовують вирази, до яких входять різні композиції відомих (детермінованих) математичних функцій. Тому усі характеристики детермінованих зображень є детермінованими і можуть бути подані аналітично або чисельно.

Найзагальніший спосіб опису випадкового зображення – імовірнісний опис – заснований на заданні спільної щільності імовірності значень випадкової функції [2]. Нехай запис $f(x,y)$ позначає випадкову неперервну функцію просторових координат x і y , яка породжує випадкове статичне напівтонове зображення. У загальному випадку випадковий процес $f(x,y)$ цілком описується спільною щільністю імовірності $p(f_1, f_2, \dots, f_N; x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N)$ для N значень функції $f_i(x_i, y_i)$ у точках x_i, y_i . Але спільні щільності імовірності високого порядку для зображень зазвичай невідомі, і їх у загальному випадку важко моделювати [2]. Тому часто обмежуються більш простими моделями. Так, для щільності імовірності першого порядку $p(f; x, y)$ іноді вдається підібрати вдалу модель з фізичних міркувань чи на основі обмірюваних гістограм. Наприклад, як моделі щільності імовірності *яскравості* застосовують [2]: закон розподілу Релея

$$p(f; x, y) = \frac{f(x, y)}{\alpha^2} \exp\left\{-\frac{[f(x, y)]^2}{2\alpha^2}\right\},$$

логарифмічно нормальний закон

$$p(f; x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} f(x, y) \sigma(x, y)} \exp\left\{-\frac{[\log(f(x, y)) - m(x, y)]^2}{2\sigma^2(x, y)}\right\}$$

та закон експоненціального розподілу імовірності:

$$p(f; x, y) = \alpha \exp\{-\alpha |f(x, y)|\}.$$

Це обумовлено тим, що яскравість може приймати тільки невід'ємні значення і тому щільність розподілу імовірності повинна бути одnobічною.

Для опису випадкового зображення можуть бути використані й умовні щільності імовірності. Так, умовна щільність розподілу імовірності значення функції $f(x, y)$ у точці (x_1, y_1) при заданому значенні цієї функції в точці (x_2, y_2) визначається співвідношенням:

$$p(f_1; x_1, y_1 | f_2; x_2, y_2) = p(f_1, f_2; x_1, y_1, x_2, y_2) / p(f_2; x_2, y_2).$$

Аналогічно визначаються умовні щільності більш високого порядку [2].

Інший спосіб опису випадкового зображення полягає в обчисленні певних середніх (за ансамблем реалізацій) величин [2]. При цьому звичайно обмежуються обчисленнями першого і другого моментів. Так, перший початковий момент, або середнє значення функції $f(x, y)$, є [2]:

$$m(x, y) = E[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) p(f; x, y) df.$$

Другий початковий момент, або автокореляційна функція¹, є [2]:

$$R(x_1, y_1; x_2, y_2) = E[f(x_1, y_1) f^*(x_2, y_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y_1) f^*(x_2, y_2) p(f_1, f_2; x_1, y_1, x_2, y_2) df_1 df_2.$$

¹ Визначення автокореляційної та автоковаріаційної функцій, які наведено в іншій фаховій літературі, можуть бути протилежними до зазначених. Тут використано визначення з [2].

Автоковаріаційна функція зображення обчислюється за формулою:

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = E\{[f(x_1, y_1) - m(x_1, y_1)][f^*(x_2, y_2) - m^*(x_2, y_2)]$$

і є другим центральним моментом. Автокореляційна й автоковаріаційна функції зв'язані співвідношенням:

$$K(x_1, y_1; x_2, y_2) = R(x_1, y_1; x_2, y_2) - m(x_1, y_1)m^*(x_2, y_2).$$

Середньоквадратичне значення випадкового процесу $f(x, y)$ отримується при $x=x_1=x_2$, $y=y_1=y_2$ і дорівнює $E[|f(x, y)|^2] = R(x, y; x, y)$, а дисперсія процесу $f(x, y)$ є: $\sigma^2(x, y) = K(x, y; x, y)$.

Випадковий процес, який народжує зображення, називають просторово-стаціонарним у *строгому* розумінні, якщо всі його моменти не залежать від зсуву початку системи координат у просторі. Випадковий процес називають просторово-стаціонарним у *широкому* сенсі, якщо зазначена вимога поширюється тільки на перші й другі моменти. Випадкове зображення, яке стаціонарне в строгому чи в широкому розумінні, має постійну середню яскравість, а його автокореляційна функція залежить тільки від різниці координат x_1-x_2 , y_1-y_2 , але не залежить від самих координат, тобто $m(x, y) = \text{const}$; $R(x_1, x_2, y_1, y_2) = R(x_1-x_2, y_1-y_2)$. Тоді вираз для просторової автокореляційної функції можна записати так: $R(\tau_x, \tau_y) = E[f(x + \tau_x, y + \tau_y)f^*(x, y)]$. Для спрощення описів автокореляційну функцію часто представляють у вигляді добутку автокореляційних функцій для кожної просторової змінної: $R(\tau_x, \tau_y) = R_x(\tau_x)R_y(\tau_y)$. У зображеннях, які створені людиною, часто зустрічаються горизонтальні і вертикальні структури і, тому, таке представлення виявляється цілком прийнятним [2].

Часто опис випадкових зображень виконують за допомогою виразів, до яких входять композиції детермінованих і випадкових математичних функцій. Найпростішим прикладом є адитивна модель зображення у вигляді суми детермінованого зображення і випадкового просторового шуму. Іншим прикладом є адитивна модель у вигляді суми випадкового зображення і випадкового просторового шуму, які є некорельованими випадковими процесами.

1.3. Приклади аналітичних розрахунків просторового спектра

Розглянемо приклади аналітичних розрахунків просторового спектра простих детермінованих напівтонових зображень. Для цього використаємо такі позначення та співвідношення.

1. Двовимірна дельта-функція $\delta(x,y)$:

"справжнє" визначення: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(x-x_0,y-y_0)dxdy = f(x_0,y_0)$;

властивості: $\delta(x-x_0,y-y_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$; $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,y)dxdy = 1$;

$$\delta(x-x_0,y-y_0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j[u(x-x_0)+v(y-y_0)]} dudv ;$$

"умовне" визначення: $\delta(x-x_0,y-y_0) = \begin{cases} \infty; & x = x_0 \text{ and } y = y_0 \\ 0; & x \neq x_0 \text{ or } y \neq y_0 \end{cases}$.

2. Двовимірна "прямокутна" функція $\text{rect}(x,y)$:

$$\text{rect}(x,y) = \begin{cases} 1; & |x| \leq 1/2 \text{ and } |y| \leq 1/2 \\ 0; & |x| > 1/2 \text{ or } |y| > 1/2 \end{cases} ; \quad \text{rect}(x,y) = \text{rect}(x)\text{rect}(y)$$

Зауважимо, що одновимірне ПФ від $\text{rect}(x)$ дає функцію

$$\text{sinc}(u/2) = \frac{\sin(u/2)}{u/2} .$$

3. Двовимірна "кругова" функція $\text{circ}(\rho)$:

$$\text{circ}(\rho) = \begin{cases} 1; & \rho \leq 1 \\ 0; & \rho > 1 \end{cases} ; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 .$$

4. Циліндрична функція першого роду, або функція Бесселя $J_n(x)$, де $n \geq 0$ – порядок функції:

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm jx \cos \varphi} d\varphi = 2\pi J_0(x) ; \quad \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} \cos(x \cos \varphi) d\varphi = \pi J_0(x) ;$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm j2\pi \rho r \cos(\theta - \varphi)} d\varphi = 2\pi J_0(2\pi \rho r) ;$$

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) ; \quad \int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) ;$$

Зокрема:

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x) ; \quad \int x J_0(x) dx = x J_1(x) .$$

1.3.1. Розрахунок просторового спектра точкового джерела

Нехай задано точкове джерело інтенсивності A , розташоване в точці двовимірному простору з координатами x_0, y_0 .

Формальний опис зображення точкового джерела є таким:

$$f(x, y) = A \delta(x - x_0, y - y_0). \quad (1.5)$$

Розрахунок просторового спектра має вигляд:

$$\begin{aligned} F(\omega_x, \omega_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A \delta(x - x_0, y - y_0) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \\ &= A e^{-j(\omega_x x_0 + \omega_y y_0)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

З (1.6) видно, що модуль просторового спектра є постійним і дорівнює A .

1.3.2. Розрахунок просторового спектра джерела у формі відрізка нескінченно тонкої нитки

Нехай задано джерело інтенсивності A у формі відрізка нескінченно тонкої нитки довжиною L . Для спрощення подальших розрахунків уведемо декартову систему координат таким чином, щоб її центр поділяв нитку навпіл, а одна з координатних осей (наприклад, вісь OY) була рівнобіжна нитці. Тоді формальний опис зображення даного джерела є таким:

$$f(x, y) = A \delta(x) \text{rect}(y/L). \quad (1.7)$$

Розрахунок просторового спектра має вигляд:

$$\begin{aligned} F(\omega_x, \omega_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A \delta(x) \text{rect}(y/L) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \\ &= A \int_{-L/2}^{L/2} e^{-j\omega_y y} dy = AL \text{sinc}(\omega_y L/2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

З (1.8) видно, що модуль просторового спектра змінюється уздовж осі ω_y , і не змінюється уздовж осі ω_x , а фаза просторового спектра набуває значення 0 та π .

1.3.3. Розрахунок просторового спектра джерела у формі прямокутника

Нехай задано джерело інтенсивності A у формі прямокутника зі сторонами довжиною X і Y відповідно. Для спрощення подальших розрахунків уведемо декартову систему координат таким чином, щоб її початок знаходився в центрі прямокутника, а координатні осі були рівнобіжні його сторонам (причому так, щоб вісь OX була рівнобіжна стороні довжиною X , а вісь OY – стороні Y). Тоді формальний опис зображення даного джерела є таким:

$$f(x,y) = A \operatorname{rect}(x/X, y/Y) = A \operatorname{rect}(x/X) \operatorname{rect}(y/Y) . \quad (1.9)$$

Розрахунок просторового спектра має вигляд:

$$\begin{aligned} F(\omega_x, \omega_y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{rect}(x/X) \operatorname{rect}(y/Y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \\ &= A \int_{-X/2}^{X/2} \left(\int_{-Y/2}^{Y/2} e^{-j\omega_y y} dy \right) e^{-j\omega_x x} dx = AXY \operatorname{sinc}(\omega_x X/2) \operatorname{sinc}(\omega_y Y/2) . \quad (1.10) \end{aligned}$$

З (1.10) видно, що модуль просторового спектра визначається добутком двох однакових за формою функцій, одна з яких задає залежність уздовж осі ω_x , а друга – уздовж осі ω_y . Фаза просторового спектра набуває тільки два значення: 0 та π .

1.3.4. Розрахунок просторового спектра джерела у формі круга

Нехай задано джерело інтенсивності A у формі круга радіусом R . Для спрощення подальших розрахунків уведемо декартову систему координат таким чином, щоб її початок знаходився в центрі круга. Тоді формальний опис зображення даного джерела є таким:

$$f(x, y) = A \operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right). \quad (1.11)$$

Розрахунок просторового спектра має вигляд:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R}\right) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy =$$

(далі робимо заміну змінних $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$; $\rho = (x^2 + y^2)^{(1/2)}$; і враховуємо, що $\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(G)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$, де область G

обмежена $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \rho \leq R$; отримуємо таке)

$$= A \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho e^{-j(\omega_x \rho \cos \varphi + \omega_y \rho \sin \varphi)} d\rho d\varphi =$$

(робимо ще одну заміну змінних $\omega_x = r \cos \theta$; $\omega_y = r \sin \theta$; $r^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$, переходячи до полярної системи координат і в площині просторових частот; тоді отримуємо)

$$\begin{aligned} &= A \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-j(r\rho \cos \theta \cos \varphi + r\rho \sin \theta \sin \varphi)} d\varphi d\rho = A \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-jr\rho(\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi)} d\varphi d\rho = \\ &= A \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-jr\rho \cos(\theta - \varphi)} d\varphi d\rho = A \int_0^R \rho 2\pi J_0(r\rho) d\rho = 2\pi A \int_0^R \rho J_0(r\rho) d\rho = \frac{2\pi A}{r^2} \int_0^R (r\rho) J_0(r\rho) d(r\rho) = \\ &= \frac{2\pi A}{r^2} r\rho J_1(r\rho) \Big|_0^R = \frac{2\pi A}{r} R J_1(rR) - 0 = \frac{2\pi R^2 A J_1(R\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2})}{R\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Таким чином, просторовий спектр джерела у формі круга також має кругову симетрію. Фазовий просторовий спектр для даного випадку має форму кілець, що відповідають значенням 0 та π відповідно.

1.4. Особливості чисельних розрахунків

Звуження неперервного зображення на множину точок площини, які розташовані у вигляді дискретної сітки, задає дискретне зображення.

Нехай задано прямокутну дискретну сітку з кроками Δx вздовж осі OX та Δy вздовж осі OY . Якщо область визначення неперервного зображення є прямокутник $[-X, X] \times [-Y, Y]$, то відповідне дискретне зображення визначається двовимірною таблицею (матрицею) розміром $M \times N$, де $M = \text{Ent}[2X/\Delta x]$ або $M = \text{Ent}[2X/\Delta x] + 1$ та $N = \text{Ent}[2Y/\Delta y]$ або $N = \text{Ent}[2Y/\Delta y] + 1$ залежно від того, як дискретна сітка накладена на прямокутник, та де $\text{Ent}[\dots]$ – унарна операція взяття цілої частини. Зрозуміло, що ті деталі неперервного зображення, розмір яких є меншим за Δx та Δy , можуть бути втрачені під час виконання операції звуження (дискретизації).

Дискретне зображення, отримане з неперервного зображення зі скінченною областю визначення, має суцільний (неперервний) просторовий спектр, який періодично повторюється. У випадку використання прямокутної дискретної сітки просторовий спектр періодично повторюється вздовж осі ω_x з періодом $\Omega_x = 2\pi/\Delta x$ та вздовж осі ω_y з періодом $\Omega_y = 2\pi/\Delta y$. Якщо цей просторовий спектр піддати дискретизації з кроками $\Delta\omega_x = 2\pi/(M\Delta x)$ та $\Delta\omega_y = 2\pi/(N\Delta y)$, то отриманому дискретному просторовому спектрові буде відповідати періодично повторюване (з періодом M вздовж осі OX та з періодом N вздовж осі OY) первісне дискретне зображення. Співвідношення між періодично повторюваним дискретним зображенням та періодично повторюваним дискретним просторовим спектром відомі як пряме та обернене двовимірні дискретні перетворення Фур'є (ДПФ).

Пряме двовимірне ДПФ визначається співвідношенням [1–3, 5–7]:

$$F(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) e^{-j2\pi \left(\frac{k_1 n_1}{M} + \frac{k_2 n_2}{N} \right)}, \quad k_1 = \overline{0, M-1}; \quad k_2 = \overline{0, N-1}, \quad (1.13)$$

де M і N – число рядків і стовпців матриці, що представляє дискретне зображення; k_1 і k_2 – номери дискретних відліків просторового спектра, причому просторовий спектр буде представлений дискретно за допомогою матриці комплексних значень, розмір якої дорівнює $M \times N$.

Обернене двовимірне ДПФ визначається співвідношенням [1–3, 5-7]:

$$f(n_1, n_2) = \frac{1}{MN} \sum_{k_1=0}^{M-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} F(k_1, k_2) e^{j2\pi \left(\frac{k_1 n_1}{M} + \frac{k_2 n_2}{N} \right)}, \quad n_1 = \overline{0, M-1}; \quad n_2 = \overline{0, N-1}, \quad (1.14)$$

Пряме і обернене двовимірні ДПФ розміром $M \times N$ точок можуть бути отримані на основі відповідних одновимірних ДПФ, що виконуються в такому порядку:

- 1) над матрицею значень виконуються одновимірні ДПФ довжиною N для кожного з M рядків;
- 2) над матрицею, яка отримана після першого кроку, виконуються одновимірні ДПФ довжиною M для кожного з N стовпців.

Можливим є і зворотний порядок: спочатку виконуються одновимірні дискретні перетворення над стовпцями, а потім – одновимірні перетворення над рядками.

Існують алгоритми швидких двовимірних ДПФ, що істотно зменшують час чисельних розрахунків [3,6]. Зазвичай відповідні алгоритми засновані на одновимірних алгоритмах швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) за основою 2. Тому при використанні стандартних пакетів обробки зображень той фрагмент цифрового зображення, над яким планується виконувати двовимірні ДПФ, рекомендується формувати так: кількість рядків у фрагменті зображення повинна бути кратною 2^m , а кількість стовпців – 2^n , де m, n – цілі додатні числа.

Властивості реальних цифрових напівтонових зображень дозволяють прискорити процес обчислення їх просторових спектрів. Оскільки таке зображення описується матрицею дійсних чисел, то для виконання перших N одновимірних ДПФ можна використовувати програму ШПФ для дійсних послідовностей, забезпечуючи більш ніж дворазову економію часу обчислень.

Зауважимо, що дискретне зображення, яке подане матрицею розміром $M \times N$, можна подати й вектором довжини $K=MN$ [3].

Контрольні питання

1. Які види зображень Ви знаєте і як їх можна формалізувати?
2. У чому відмінність моделей кольорового та напівтонового зображень?
3. За якою схемою виконується просторова обробка кольорових зображень?

4. Наведіть можливі варіанти міжкомпонентної обробки багатокомпонентного зображення.
5. Чому для опису випадкових зображень застосовуються однобічні щільності розподілу імовірності?
6. Чи можна використовувати суто нормальний закон розподілу імовірностей для моделювання просторового шуму, що адитивно накладається на зображення?
7. Якщо випадкове зображення і просторовий шум статистично незалежні, то чому дорівнює їх взаємкореляційна функція? взаємоковаріаційна функція?
8. У якому випадку автокореляційну функцію можна вважати просторово роздільною? Чи є можливим такий поділ, якщо зображення містить кругові чи кільцеві структури?
9. Якщо випадкове зображення є стаціонарним у вузькому розумінні, то чи є воно стаціонарним у широкому розумінні? А навпаки?
10. Запишіть зв'язок середньоквадратичного значення, дисперсії і середнього значення випадкового зображення для випадків, коли це зображення можна вважати стаціонарним і коли його не можна вважати стаціонарним.
11. Якщо середнє значення випадкового зображення змінюється у просторі, то чи є таке зображення стаціонарним?
12. Якщо середнє значення випадкового зображення не змінюється у просторі, а дисперсія – змінюється у просторі, то чи є таке зображення стаціонарним?
13. Якщо середнє значення і дисперсія випадкового зображення не змінюються у просторі, то чи є таке зображення стаціонарним?
14. Якщо середнє значення випадкового зображення не змінюється в просторі і його автокореляційна функція залежить тільки від різниці просторових координат, але не від самих координат, то чи є таке зображення стаціонарним?
15. На детерміноване зображення адитивно накладено просторовий шум з певним законом розподілу його значень. За яких умов таке зображення буде просторово стаціонарним?
16. Що називають просторовим спектром зображення?
17. Дайте визначення поняттю "просторова частота".
18. Чому дорівнює просторовий спектр від суми двох зображень?

19. Чому дорівнює просторовий спектр від добутку двох зображень?
20. Як зміниться просторовий спектр, якщо зображення зсунути вздовж однієї з просторових координат?
21. Як зміниться просторовий спектр, якщо до зображення додати певний фон?
22. Як зміниться просторовий спектр, якщо на напівтоновому зображенні "інвертувати" тони?
23. Як зміниться просторовий спектр, якщо напівтонове зображення зробити більш контрастним? менш контрастним?
24. Запишіть формули прямого й оберненого двовимірних ПФ.
25. Запишіть формули прямого й оберненого двовимірних ДПФ.
26. Дайте опис реалізації двовимірного ДПФ через одновимірні ДПФ.
27. Чим відрізняється двовимірне швидке ДПФ від двовимірного ДПФ?
28. Що буде просторовим спектром просторового спектра певного зображення?
29. Наведіть умовні малюнки двовимірних функцій $\delta(x,y)$, $\delta(x-x_0,y-y_0)$, $\delta(x+x_0,y+y_0)$, $\delta(x-x_0,y+y_0)$, $\delta(x+x_0,y-y_0)$, $\delta(x,y-y_0)$, $\delta(x,y+y_0)$, $\delta(x-x_0,y)$, $\delta(x+x_0,y)$, де $x_0=1$, $y_0=2$. Укажіть, чим відрізняються їх двовимірні перетворення Фур'є.
30. Наведіть малюнки двовимірних функцій $\text{rect}(x,y)$, $\text{rect}(x-x_0,y-y_0)$, $\text{rect}(x+x_0,y+y_0)$, $\text{rect}(x-x_0,y+y_0)$, $\text{rect}(x+x_0,y-y_0)$, $\text{rect}(x,y-y_0)$, $\text{rect}(x,y+y_0)$, $\text{rect}(x-x_0,y)$, $\text{rect}(x+x_0,y)$, де $x_0=2$, $y_0=2$. Укажіть, чим відрізняються двовимірні перетворення Фур'є цих функцій.
31. Наведіть малюнки двовимірних функцій $\text{circ}(x,y)$, $\text{circ}(x-x_0,y-y_0)$, $\text{circ}(x+x_0,y+y_0)$, $\text{circ}(x-x_0,y+y_0)$, $\text{circ}(x+x_0,y-y_0)$, $\text{circ}(x,y-y_0)$, $\text{circ}(x,y+y_0)$, $\text{circ}(x-x_0,y)$, $\text{circ}(x+x_0,y)$, де $x_0=1$, $y_0=1$. Укажіть, чим відрізняються двовимірні перетворення Фур'є цих функцій.
32. Наведіть малюнок двовимірної функції $f(x,y) = \text{sinc}(\pi x/4)$. Укажіть форму двовимірного перетворення Фур'є цієї функції. Чому дорівнює сторона?
33. Наведіть малюнок двовимірної функції $f(x,y) = 2 \text{sinc}(\pi x) \text{sinc}(2\pi y)$. Укажіть форму двовимірного перетворення Фур'є цієї функції. Чому дорівнюють сторони?

34. Наведіть малюнок двовимірної функції $f(x, y) = \frac{J_1(2\pi\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Укажіть форму двовимірного перетворення Фур'є цієї функції. Чому дорівнює радіус?

Лабораторна робота № 1

Тема: Математичний опис зображень.

Ціль: Вивчення способів математичного опису зображень.

Завдання до лабораторної роботи. Лабораторна робота містить 5 завдань; кожне завдання має кілька варіантів. Для виконання лабораторної роботи необхідно опрацювати вказані викладачем варіанти завдань, представити короткий звіт і захистити отримані результати. Звіт оформлюється друкованим чи рукописним способом і повинен містити *тільки результати* виконання завдань.

Завдання 1. Побудова математичного опису детермінованих напівтонових зображень у просторовій і просторово-частотній областях.

1.1. Формалізувати заданий словесний опис неперервного зображення (див. табл. 1.1) записом конкретного математичного виразу для скалярної функції $f(x, y)$.

1.2. Виконати чисельне моделювання заданого варіанта зображення, формуючи відповідне цифрове зображення шляхом застосування до неперервного зображення правил просторової дискретизації і квантування за рівнем яскравості. Вказати, які правила були використані, які кроки дискретизації і квантування були встановлені і які максимальні (за модулем) значення просторових частот ω_x і ω_y (відповідно до теореми відліків Котельникова – Шеннона) будуть досягнуті. Результати моделювання представити в напівтоновому вигляді й у вигляді відповідних рельєфних поверхонь; результати розрахунків подати з числами та з указівкою відповідних фізичних розмірностей.

1.3. Виконати чисельний розрахунок просторового спектра заданого зображення і відобразити його реальну і уявну частини, а також модуль і фазу в напівтоновому вигляді й у вигляді відповідних рельєфних поверхонь. Вказати місце розташування відліку, що відповідає нульовій

просторовій частоті, а саме просторової точки з координатами $\omega_x=0$; $\omega_y=0$. Вказати напрямки збільшення й зменшення значень просторових частот ω_x і ω_y .

1.4. Для забезпечення кращої наочності, перетворити отриманий просторовий спектр так, щоб відлік, який відповідає нульовій просторовій частоті, був розташований у центрі малюнка. Вказати напрямки збільшення й зменшення значень просторових частот. Вказати математичне правило, яке необхідно застосувати до двовимірного масиву значень первісного цифрового зображення, щоб здійснити дане перетворення.

1.5. Дати словесний опис форми просторового спектра, а також форми області (область повинна визначатися однозначно!), де зосереджено 90 % енергії просторового спектра, виключивши з розгляду і розрахунків значення на нульовій просторовій частоті. Обчислити відношення площі зазначеної області до площі усієї області, яку займає просторовий спектр. Далі виконати таке.

1.5.1. Видалити просторовий спектр *за межами* зазначеної області і, виконавши обернене ДПФ, побудувати зображення і порівняти його з первісним зображенням.

1.5.2. Видалити просторовий спектр *всередині* зазначеної області і, виконавши обернене ДПФ, побудувати зображення і порівняти його з первісним зображенням.

Порівняння виконувати як візуально, так і чисельно. При візуальному порівнянні в разі потреби додати до отриманого зображення певний постійний фон (для забезпечення невід'ємності значень зображення). При чисельному порівнянні підрахувати суму квадратів різниць (поточково!) між значеннями отриманого зображення і первісного зображення, виключивши з розрахунків значення на нульовій просторовій частоті; підраховану суму поділити на суму квадратів значень первісного зображення і пояснити отриманий результат.

1.6. Виконати аналітичний розрахунок просторового спектра заданого неперервного зображення. Зіставити отримані результати з результатами чисельного моделювання, зазначити й пояснити отримані відмінності.

1.7. Методом чисельного моделювання дослідити зміну просторового спектра заданого зображення при виконанні зсувів

зображення у просторі, обертанні зображення у просторі, стиску й розтягненні зображення у просторі, деформації зображення у просторі уздовж обраних напрямків. Пояснити отримані результати, залучаючи властивості двовимірного перетворення Фур'є.

Таблиця 1.1

Варіанти зображень для завдання 1

| № п/п | Словесний опис зображення | Повний розмір зображення |
|-------|--|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | Сірий прямокутник розміром 1 см × 5 см на темному фоні | 0,5 м × 0,5 м |
| 2 | Темний прямокутник розміром 2 см × 4 см на світлому фоні | 0,4 м × 0,4 м |
| 3 | Яскраво-білий квадрат розміром 1 см × 1 см на сірому фоні | 0,2 м × 0,2 м |
| 4 | Темний квадрат розміром 2 см × 2 см на сірому фоні | 0,4 м × 0,2 м |
| 5 | Темні границі прямокутника на світлому фоні; розмір прямокутника 1 см × 2 см | 0,5 м × 0,4 м |
| 6 | Яскраво-білі границі прямокутника на темному фоні; розмір прямокутника 4 см × 1 см | 0,8 м × 0,4 м |
| 7 | Світлі границі квадрата на сірому фоні; розмір квадрата 0.5см × 0.5см | 0,25 м × 0,25 м |
| 8 | Темні границі квадрата на сірому фоні; розмір квадрата 1 см × 1 см | 0,75 м × 0,75 м |
| 9 | Два яскраво-білих відрізки рівнобіжних ліній на темному фоні, які є рівнобіжними осі ОХ, причому їх проекції на вісь ОХ збігаються; довжина відрізків дорівнює 2 см, а відстань між відрізками (уздовж осі ОУ) дорівнює 4 см | 0,8 м × 0,8 м |
| 10 | Два темних відрізки рівнобіжних ліній на світлому фоні, які є рівнобіжними осі ОХ, причому їх проекції на вісь ОХ збігаються; довжина відрізків дорівнює 1см, а відстань між відрізками (уздовж осі ОУ) дорівнює 2 см | 0,4 м × 0,8 м |

Продовження таблиці 1.1

| 1 | 2 | 3 |
|----|--|-----------------|
| 11 | Два яскраво-білих відрізки перпендикулярних ліній на темному фоні, що утворюють за формою "хрест". Точка перетину відрізків поділяє кожен з відрізків навпіл; довжина відрізків складає 2 см | 0,4 м × 0,4 м |
| 12 | Два темних відрізки перпендикулярних ліній на світлому фоні, що утворюють за формою "хрест". Точка перетину відрізків поділяє кожен з відрізків навпіл, довжина відрізків складає 1 см | 0,2 м × 0,2 м |
| 13 | Два яскраво-білих відрізки однієї і тієї самої лінії на темному фоні, які рівнобіжні осі ОХ; відстань між кінцем першого і початком другого відрізка складає 1 см; довжина відрізків складає 2 см | 0,4 м × 0,4 м |
| 14 | Два темних відрізки однієї і тієї самої лінії на світлому фоні, які рівнобіжні осі ОХ; відстань між кінцем першого і початком другого відрізка складає 2 см; довжина відрізків складає 2 см | 0,5 м × 0,5 м |
| 15 | Два яскраво-білих відрізки перпендикулярних ліній на темному фоні, що утворюють за формою символ "Т". Точка перетину відрізків поділяє один з відрізків навпіл; довжина обох відрізків складає 2 см | 0,5 м × 0,5 м |
| 16 | Два темних відрізки перпендикулярних ліній на світлому фоні, що утворюють за формою символ "Т"; точка перетину відрізків поділяє один з відрізків навпіл; довжина обох відрізків складає 1 см | 0,25 м × 0,25 м |
| 17 | 5 яскраво-білих відрізків однієї і тієї самої лінії на темному фоні, які рівнобіжні осі ОХ; відстань між кінцем попереднього і початком наступного відрізка складає 1 см; довжина відрізків складає 0,2 см | 0,2 м × 0,2 м |
| 18 | 5 темних відрізків однієї і тієї самої лінії на світлому фоні, які рівнобіжні осі ОХ; відстань між кінцем попереднього і початком наступного відрізка складає 0,5 см; довжина відрізків складає 0,2 см | 0,2 м × 0,4 м |

Продовження таблиці 1.1

| 1 | 2 | 3 |
|----|--|-----------------|
| 19 | 4 яскраво-білих точкових джерела на темному фоні, які розташовані в кутах квадрата; довжина сторони квадрата дорівнює 1 см | 0,4 м × 0,4 м |
| 20 | 4 сірих точкових джерела на світлому фоні, які розташовані в кутах квадрата; довжина сторони квадрата дорівнює 2 см | 0,2 м × 0,2 м |
| 21 | 5 білих точкових джерел на темному фоні, які розташовані в 4 кутах і в центрі квадрата; довжина сторони квадрата дорівнює 1 см | 0,5 м × 0,5 м |
| 22 | 2 яскраво-білих точкових джерела на темному фоні, які розташовані на відстані 1 см один від одного | 0,8 м × 0,8 м |
| 23 | 4 сірих точкових джерела і 1 яскраво-біле точкове джерело на темному фоні; сірі джерела розташовані в кутах квадрата, а яскраво-біле – в центрі квадрата; довжина сторони квадрата дорівнює 1 см | 0,5 м × 0,5 м |
| 24 | Одне сіре й одне біле точкові джерела на темному фоні; джерела розташовані на відстані 1 см одне від одного | 0,5 м × 0,5 м |
| 25 | Ясно-сірий круг на темному фоні; радіус круга 1 см | 0,4 м × 0,4 м |
| 26 | Темне кільце на світлому фоні; внутрішній радіус кільця дорівнює 2 см, зовнішній – 2,2 см | 0,4 м × 0,4 м |
| 27 | Два сірих відрізки рівнобіжних ліній на темному фоні, між якими посередині розташоване яскраво-біле точкове джерело; відрізки ліній рівнобіжні осі ОХ, а їх проекції на вісь ОХ збігаються; довжина відрізків дорівнює 1 см, відстань між відрізками (уздовж осі ОУ) дорівнює 2 см | 0,2 м × 0,2 м |
| 28 | Сірий прямокутник на темному фоні, в центрі якого розташоване яскраво-біле точкове джерело; сторони прямокутника дорівнюють 2 см і 3 см відповідно | 0,12 м × 0,12 м |
| 29 | Яскраво-білий квадрат на сірому фоні, в центрі якого розташоване сіре точкове джерело; сторона квадрата дорівнює 1,5 см | 0,15 м × 0,15 м |

Закінчення таблиці 1.1

| 1 | 2 | 3 |
|----|---|---------------|
| 30 | Сірий круг на темному фоні, в центрі якого розташоване яскраво-біле точкове джерело; радіус круга дорівнює 3 см | 0,6 м × 0,6 м |

Примітка. Вважати встановленою такою відповідність тонів рівням яскравості: "чорний" – 0; "темний" – 40; "сірий" – 80; "ясно-сірий" – 120; "світлий" – 160; "білий" – 200; "яскраво-білий" – 240.

Завдання 2. Аналіз просторового спектра зображень друкованих символів.

2.1. Використавши номер свого варіанта як номер символу українського алфавіту, побудувати цифрове зображення цього символу з такими атрибутами: "білий" символ на "темному" фоні, шрифт Times New Roman 12, звичайне накреслення; повний розмір зображення 128×128 пікселів.

2.2. Виконати аналіз просторового спектра для зображення даного символу, вказуючи форму модуля його просторового спектра, а також форму областей просторових частот, у яких зосереджено 10 %, 20 %, 30 %, 40 %, 50 %, 60 %, 70 %, 80 % і 90 % енергії просторового спектра зображення (області повинні визначатися однозначно!). Побудувати графік залежності площі областей просторових частот від частки енергії просторового спектра, яким вони відповідають.

Завдання 3. Синтез зображень за частиною просторового спектра.

Для виконання завдання 3 використовувати результати чисельного розрахунку просторового спектра, отримані в завданні 2.

3.1. Взяти тільки реальну частину просторового спектра зображення (покласти уявну частину спектра тотожно рівною нулю), виконати обернене двовимірне ДПФ і на основі дійсної та уявної частин отриманого результату побудувати відповідні напівтонові зображення.

3.2. Взяти тільки уявну частину просторового спектра зображення (покласти реальну частину спектра тотожно рівною нулю), виконати обернене двовимірне ДПФ і на основі дійсної та уявної частин отриманого результату побудувати відповідні напівтонові зображення.

3.3. Взяти тільки модуль просторового спектра зображення (покласти фазу просторового спектра тотожно рівною нулю), виконати обернене двовимірне ДПФ і на основі дійсної та уявної частин отриманого результату побудувати відповідні напівтонові зображення.

3.4. Взяти тільки квадрат модуля просторового спектра зображення, виконати обернене двовимірне ДПФ і на основі дійсної та уявної частин отриманого результату побудувати відповідні напівтонові зображення.

3.5. Взяти фазу просторового спектра зображення i , установивши значення модуля просторового спектра рівними 1, виконати обернене двовимірне ДПФ і на основі дійсної та уявної частин отриманого результату побудувати відповідні напівтонові зображення.

3.6. Взяти фазу просторового спектра зображення, піднести значення модуля просторового спектра до степеня 2, виконати обернене двовимірне ДПФ і на основі дійсної та уявної частин отриманого результату побудувати відповідні напівтонові зображення.

3.7. Взяти фазу просторового спектра зображення, піднести значення модуля просторового спектра до степеня $1/2$, виконати обернене двовимірне ДПФ і на основі дійсної та уявної частин отриманого результату побудувати відповідні напівтонові зображення.

Описати й пояснити результати, отримані в пп. 3.1 – 3.7.

Фрагмент тексту програми для виконання завдань 2, 3 наведено у додатку 1.1.

Завдання 4. Побудова математичного опису простого кольорового зображення.

Отримати у викладача файл з варіантом цифрового кольорового зображення та скласти математичний вираз (у дискретному вигляді), який описує задане кольорове зображення в RGB-координатній системі.

Завдання 5. Моделювання випадкових зображень.

Виконати чисельне моделювання випадкових зображень за заданим законом розподілу імовірностей їх значень (табл. 1.2); параметри законів видає викладач.

5.1. Виконати генерацію 1000000 випадкових значень, побудувати одновимірну гістограму і переконатися в її відповідності заданому закону.

5.2. Побудувати просторово-стаціонарне випадкове зображення.

5.3. Побудувати просторово-нестационарне випадкове зображення, для якого перший момент є лінійною функцією просторової координати x , а другий момент є постійною величиною.

5.4. Побудувати просторово-нестационарне випадкове зображення, для якого перший момент є постійною величиною, а другий центральний момент є лінійною функцією просторової координати x .

5.5. Побудувати просторово-нестационарне випадкове зображення, для якого перший і другий моменти є лінійною функцією просторової координати x .

Таблиця 1.2

Варіанти законів розподілу імовірностей для завдання 5

| Номери варіантів | Закон розподілу імовірностей |
|------------------|------------------------------|
| 1–5, 16–20 | Релея |
| 6–10, 21–25 | логарифмічно нормальний |
| 11–15, 26–30 | експоненціальний однобічний |

Література

1. Василенко Г.И. Восстановление изображений / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн.1. – 312 с.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн.2. – 480 с.
4. Вовк С.М. Вступ до методів морфологічної обробки зображень : навч. посіб. / С.М. Вовк, А.М. Ахметшин. – Д. : РВВ ДНУ, 2000. – 52 с.
5. Venetsanopoulos A.N. Digital image processing and applications / Department of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, Canada, 1996. – 598 p.
6. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т.С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд, Г.Дж. Нуссбаумер и др. ; под ред. Т.С.Хуанга; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1984. – 224 с.
7. Яншин В.В. Обработка изображений на языке Си для IBM PC: Алгоритмы и программы / В.В. Яншин, Г.А. Калинин. – М. : Мир, 1994. – 242 с.

Додаток 1.1

Фрагмент MatLab-тексту програми для завдань 2 та 3.

```

%Lab1 Task 2 and 3 ---> Symbol Image
close all; clear all;
%Input True Image from file
from='D:\lab1.bmp'; %256-color bmp
image_bmp=imread(from);
[N,M]=size(image_bmp);
%-----
%convert image to double type for processing
f=double(image_bmp);
%rescale binary data (0-->0, 255-->200)
for k1=1:N,
    for k2=1:M,
        if f(k1,k2)~=0 f(k1,k2)=200;end;
    end;
end;
%show true image
figure(1);imshow(f,[0 255]);
%show 2D-function
figure;mesh(f);colormap(gray);
%do image spectra and shift it to center
SF=fftshift(fft2(f));
%show image spectra module as 2D-function
figure,mesh(abs(SF));
%-----
%using only real part of spectra
%for real part of complex data
fr=real(fft2(real(fft2(f))));
%show 2-D function
figure;mesh(fr);
%rescale and build non-negative
fmin=min(min(fr));
fr=fr-fmin;
fmax=max(max(fr));
fr=(250/fmax).*fr;
%end of rescale
figure;imshow(fr,[0 255]);
%for image part of complex data
fr=imag(fft2(real(fft2(f))));
%show image
figure;mesh(fr);
    fmin=min(min(fr));
    fr=fr-fmin;
    fmax=max(max(fr));
    fr=(250/fmax).*fr;
figure;imshow(fr,[0 255]);
%end of using only real part of spectra
%-----
%using only module of spectra
%for real part of image
fr=real(fftshift(fft2(abs(fft2(f)))));
%show 2-D function
figure;mesh(fr);
    fmin=min(min(fr));
    fr=fr-fmin;
    fmax=max(max(fr));
    fr=(250/fmax).*fr;
figure;imshow(fr,[0 255]);
%rescale and truncate data for better show
for n1=1:N,
    for n2=1:M,
        if fr(n1,n2)>100 fr(n1,n2)=100;end;
    end;
end;
fmin=min(min(fr));
fr=fr-fmin;
fmax=max(max(fr));
fr=(250/fmax).*fr;
figure;imshow(fr,[0 255]);
%for image part of image
fr=imag(fftshift(fft2(abs(fft2(f)))));
%show 2-D function
figure;mesh(fr);
    fmin=min(min(fr));
    fr=fr-fmin;
    fmax=max(max(fr));
    fr=(250/fmax).*fr;
figure;imshow(fr,[0 255]);
%end of using only module of spectra
%-----
%using faze with module=1
cf=fft2(f);
mf=abs(cf);
af=angle(cf);
%do new function
fnew=exp(i*af);%module=1
% fnew=mf.*exp(i*af);%use this to verify calculations

%show real part of 2D-function
fr=real(fft2(fnew));
%show 2D-function

```

```
figure;mesh(fr);
fmin=min(min(fr));
fr=fr-fmin;
fmax=max(max(fr));
fr=(250/fmax).*fr;
%show image
figure;imshow(fr,[0 255]);

%show image part of 2D-function
fr=imag(iff2(fnew));
```

```
%show 2D-function
figure;mesh(fr);
fmin=min(min(fr));
fr=fr-fmin;
fmax=max(max(fr));
fr=(250/fmax).*fr;
%show image
figure;imshow(fr,[0 255]);
%end of faze with module=1
%-----
```

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ПРОСТОРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

Процес виокремлення певних компонентів просторового складу зображення з їх подальшим підсиленням, ослабленням чи видаленням називають *просторовою фільтрацією*. Просторова фільтрація може здійснюватися за лінійними або нелінійними законами, мати локальний або глобальний характер, виконуватися безпосередньо у просторовій області або в області просторових частот за рекурсивною або за нерекурсивною схемою чи адаптивно. Просторова фільтрація може застосовуватися до неперервних, дискретних чи цифрових зображень, що можуть бути багатозональними, кольоровими, напівтоновими, бінарними [1].

Фільтрація зображень завжди проводиться з певною метою. Зазвичай ця мета формулюється у вигляді вимог на придбання "відфільтрованим" зображенням бажаних властивостей та знаходить відображення в математичній постановці задачі фільтрації і критеріях її якості.

Традиційно просторова фільтрація зображень застосовується для рішення задач покращення зображень і задач відновлення зображень [1].

Покращення зображення (Image Enhancement) – це процес представлення зображення у формі, яка є більш придатною для його подальшого використання. Клас задач покращення зображень надзвичайно широкий [2]. До нього відносять, наприклад, задачі видалення із зображення просторової перешкоди та шуму, задачі підкреслення границь перепадів яскравості, задачі зміни контрасту, псевдофарбування і т.д. Відмінною рисою даного класу задач є те, що для їх рішення не робиться ніяких спроб оцінити викривлення, що виникають на етапах формування і реєстрації зображень [1–10].

Відновлення зображення (Image Restoration) – це процес одержання такого зображення, яке є близьким до певного ідеального зображення настільки, наскільки це можливо. При рішенні задач відновлення зображень намагаються усунути викривлення, внесені системами формування і реєстрації зображень, у тому числі такі, як просторовий шум, геометричні спотворення, неоднорідність фону, втрата контрасту, "розмиття" і т.ін. Природно, що методи відновлення

вимагають наявності відповідних кількісних мір і підходів для оцінювання якості відновленого зображення. Відповідні фільтри, які застосовуються для рішення задач відновлення зображень, називають відновлювальними фільтрами. Серед них найбільш відомими є інверсний і псевдоінверсний фільтри, фільтри Вінера і Бекуса – Гільберта, узагальнений фільтр Вінера, фільтри на основі методу регуляризації Тихонова й ін. [1–7,10–11].

У даній лабораторній роботі розглядаються методи лінійної і нелінійної просторової фільтрації для рішення задач *покращення* напівтонових статичних зображень, які описуються скалярними двовимірними функціями просторових координат. Зауважимо, що використане далі в тексті поняття "просторово-частотна область" не слід плутати з поняттям "спектральна область" [8].

2.1. Загальні відомості

Будь-який процес просторової фільтрації напівтонового зображення можна розглядати як певне перетворення. Це перетворення в загальному вигляді можна описати операторним рівнянням:

1) у просторовій області:

$$g(x,y)=\mathbf{A}[f(x,y)] \quad , \quad (2.1)$$

де \mathbf{A} – певний оператор, за допомогою якого виконується просторове перетворення зображення $f(x,y)$ у "відфільтроване" зображення $g(x,y)$;

2) у просторово-частотній області:

$$G(\omega_x, \omega_y)=\mathbf{B}[F(\omega_x, \omega_y)] \quad , \quad (2.2)$$

де \mathbf{B} – певний оператор, за допомогою якого виконується перетворення просторового спектра $F(\omega_x, \omega_y)$ зображення $f(x,y)$ у просторовий спектр $G(\omega_x, \omega_y)$ "відфільтрованого" зображення $g(x,y)$.

Зазначимо, що зображення $g(x,y)$ завжди може бути отримане за допомогою оберненого перетворення Фур'є зі свого просторового спектра $G(\omega_x, \omega_y)$, і навпаки. Тому зв'язок операторів \mathbf{A} і \mathbf{B} є доволі простим. Так, з (2.1) та (2.2) випливає, що $\mathbf{A}=\mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{F}^1$ і $\mathbf{B}=\mathbf{F}^1\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}$, де \mathbf{F}^1 і

F^{-1} – лінійні оператори прямого і оберненого перетворень Фур'є відповідно. Проте не завжди є можливим конструктивне задання відповідного оператора за заданим оператором у Фур'є-спряженій області. Так, якщо оператор \mathbf{B} є нелінійним, то зазвичай не можна конструктивно задати відповідний йому оператор \mathbf{A} , що діє у просторовій області, і навпаки. Наприклад, якщо оператор \mathbf{B} задає операцію обчислення кореня n -того степеня з модуля просторово-частотних коефіцієнтів [2], то цю операцію не можна представити яким-небудь відомим конструктивним способом (алгоритмом) у просторовій області. Але якщо оператор \mathbf{B} задає операцію піднесення значень просторового спектра до другого степеня, то такий оператор можна представити у просторовій області як оператор, що виконує операцію згортки зображення самого із собою [10].

Процес просторової фільтрації звичайно описують у тій області, яка є або єдиною придатною, або більш зручною для розгляду, або застосування якої забезпечує вигоду за точністю і швидкістю рішення конкретної задачі фільтрації.

2.2. Лінійна просторова фільтрація

Якщо оператор \mathbf{A} , що діє у просторовій області, є лінійним, то говорять про лінійну просторову фільтрацію зображення. Тоді оператор \mathbf{B} , що діє у просторово-частотній області, також буде лінійним (як добуток лінійних операторів $\mathbf{F}^1\mathbf{A}\mathbf{F}^{-1}$). Це означає, що при застосуванні лінійної фільтрації принцип суперпозиції буде виконуватися як у просторовій області, так і в просторово-частотній області.

У загальному випадку лінійну просторову фільтрацію зображення описують *інтегралом суперпозиції*, що можна представити двома способами:

1) у просторовій області:

$$g(x,y) = \mathbf{L}[f(x,y)] = \iint f(\xi, \eta) w(x,y; \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.3)$$

де \mathbf{L} – лінійний оператор, за допомогою якого виконується лінійне перетворення зображення f фільтром w у зображення g , і де функція

$$w(x,y;\xi,\eta) = \mathbf{L}[\delta(x-\xi, y-\eta)] \quad (2.4)$$

задає просторову характеристику лінійного фільтра і є функцією чотирьох аргументів x, y, ξ, η , що належать площині (x,y) результату фільтрації і площині (ξ, η) оброблюваного зображення відповідно, і де $\delta(x,y)$ – двовимірна δ -функція, а $\mathbf{L}[\delta(x-\xi, y-\eta)]$ – лінійне перетворення двовимірної δ -функції;

2) у просторово-частотній області:

$$G(\omega_x, \omega_y) = \mathbf{L}_w[F(\omega_x, \omega_y)] = \iint F(\omega_\xi, \omega_\eta) W(\omega_x, \omega_y; \omega_\xi, \omega_\eta) d\omega_\xi d\omega_\eta, \quad (2.5)$$

де \mathbf{L}_w – лінійний оператор, який є унітарно подібним до \mathbf{L} за допомогою операторів прямого і оберненого перетворень Фур'є (тобто $\mathbf{L}_w = \mathbf{F}^1 \mathbf{L} \mathbf{F}^{-1}$), і де функція

$$W(\omega_x, \omega_y; \omega_\xi, \omega_\eta) = \mathbf{L}_w[\delta(\omega_x - \omega_\xi, \omega_y - \omega_\eta)] \quad (2.6)$$

задає просторово-частотну характеристику лінійного фільтра і є функцією чотирьох аргументів $\omega_x, \omega_y, \omega_\xi, \omega_\eta$.

Рівняння (2.3) та (2.5) описують лінійну просторово-залежну фільтрацію і лінійну частотно-залежну фільтрацію відповідно (тут і далі термін "частота" повинен розумітися як "просторова частота", а "частотний" – як "просторово-частотний"). Більш простим і часто використовуваним на практиці є випадок лінійної просторово-інваріантної фільтрації, а також випадок лінійної частотно-інваріантної фільтрації.

Лінійна просторово-інваріантна фільтрація означає, що результат лінійної операції \mathbf{L} залежить тільки від різниці відповідних просторових аргументів, тобто

$$\mathbf{L}[\delta(x-\xi, y-\eta)] = w(x - \xi, y - \eta). \quad (2.7)$$

У цьому випадку рівняння лінійної просторової фільтрації приймає вигляд рівняння двовимірної згортки:

$$g(x,y)=\mathbf{L}[f(x,y)]=\iint f(\xi, \eta) w(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta , \quad (2.8)$$

а відповідне частотне рівняння (2.5) приймає вигляд добутку просторових спектрів:

$$G(\omega_x, \omega_y)=\mathbf{L}_w[F(\omega_x, \omega_y)]= F(\omega_x, \omega_y) W(\omega_x, \omega_y) . \quad (2.9)$$

Лінійна частотно-інваріантна фільтрація означає, що результат лінійної операції \mathbf{L}_w залежить тільки від різниці відповідних частотних аргументів, тобто

$$\mathbf{L}_w[\delta(\omega_x - \omega_\xi, \omega_y - \omega_\eta)] = W(\omega_x - \omega_\xi, \omega_y - \omega_\eta) . \quad (2.10)$$

У цьому випадку рівняння лінійної фільтрації у просторово-частотній області приймає вигляд рівняння двовимірної згортки:

$$G(\omega_x, \omega_y)=\mathbf{L}_w[F(\omega_x, \omega_y)]=\iint F(\omega_\xi, \omega_\eta) W(\omega_x - \omega_\xi, \omega_y - \omega_\eta) d\omega_\xi d\omega_\eta , \quad (2.11)$$

а відповідне просторове рівняння (2.3) є таким:

$$g(x,y)=\mathbf{L}[f(x,y)] = f(x,y) w(x,y) . \quad (2.12)$$

Зазначимо, що рівняння (2.12) описує мультиплікативну фільтрацію зображення $f(x,y)$ за допомогою просторового фільтра $w(x,y)$.

Розглянемо особливості лінійної просторово-інваріантної фільтрації. Властивість просторової інваріантності означає, що форма просторового відгуку фільтра на точкову дію (точкове джерело) буде тією самою незалежно від місця розташування точкового джерела у просторі і буде визначатися тільки зсувами площини результату фільтрації стосовно площини оброблюваного зображення. Згідно з (2.8) та (2.9), лінійна просторово-інваріантна фільтрація може виконуватися у просторовій області за допомогою згортки зображення з просторовою характеристикою бажаного фільтра або у просторово-частотній області за допомогою множення просторового спектра зображення на просторово-частотну характеристику бажаного фільтра. Так як у цьому випадку існує взаємо однозначна відповідність між просторовою

характеристикою бажаного фільтра і його просторово-частотною характеристикою, то зазначені підходи завжди дають однаковий результат. Конструктивні доводи на користь застосування першого чи другого підходу звичайно виникають на етапі вивчення конкретної ситуації і мають на меті одержання *ефективних* алгоритмів лінійної просторово-інваріантної фільтрації.

Лінійна просторово-інваріантна фільтрація в деяких випадках може призводити до від'ємних, нефізичних значень "відфільтрованого" зображення. Якщо дана фільтрація є певним проміжним етапом обробки зображення, то такий результат іноді може бути прийнятним для подальшого використання. Якщо ж такий результат не є прийнятним, то його можна "підправити" шляхом додавання певної позитивної константи до усіх значень "відфільтрованого" зображення, забезпечуючи їхню невід'ємність. Сама поява від'ємних нефізичних значень обумовлена тим, що просторова характеристика застосовуваного лінійного фільтра має області від'ємних значень, які в результаті згортки можуть народити області від'ємних вихідних значень. Якщо ж просторова характеристика застосовуваного лінійного фільтра не має від'ємних значень, то "відфільтроване" зображення завжди буде невід'ємним, тобто "фізичним".

Прикладами лінійних просторово-інваріантних фільтрів, просторова характеристика яких має від'ємні значення, є так звані *ідеальні* просторові фільтри. Дані фільтри призначені для повного ("ідеального") видалення просторового спектра в межах чи за межами заданої області (областей) просторових частот. Найбільш просто ідеальні фільтри задаються у просторово-частотній області: для тієї області просторових частот, яку необхідно видалити, значення просторово-частотної характеристики фільтра покладають рівними 0, інші – рівними 1. Просторові характеристики ідеальних фільтрів не обмежені в просторі і тому такі фільтри не є фізично реалізуємими. Але вони можуть бути наближені з будь-якою заданою точністю.

Традиційно розрізняють два основних типи ідеальних просторових фільтрів: 1) ідеальний фільтр нижніх просторових частот; 2) ідеальний фільтр верхніх просторових частот. Іноді також говорять про ідеальну смугову і ідеальну режекторну просторову фільтрацію.

Просторово-частотна характеристика ідеального фільтра нижніх просторових частот є такою:

- для області просторових частот у формі прямокутника $[-\Omega_x, \Omega_x] \times [-\Omega_y, \Omega_y]$:

$$W(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \text{if } |\omega_x| \leq \Omega_x \text{ and } |\omega_y| \leq \Omega_y \\ 0, & \text{other } \omega_x, \omega_y \end{cases} ; \quad (2.13)$$

- для області просторових частот у формі круга радіусом Ω :

$$W(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega_x^2 + \omega_y^2 \leq \Omega^2 \\ 0, & \text{other } \omega_x, \omega_y \end{cases} . \quad (2.14)$$

Просторові характеристики фільтрів, що відповідають (2.13) і (2.14), можна легко записати аналітично. Але якщо область фільтрації низьких просторових частот має більш складну форму, ніж суперпозиція (накладення) прямокутників та/або кругів, то відповідна їй просторова характеристика може й не мати аналітичного виразу через відомі функції.

Просторово-частотна характеристика ідеального фільтра верхніх просторових частот є такою:

- для області просторових частот у формі прямокутника $[-\Omega_x, \Omega_x] \times [-\Omega_y, \Omega_y]$:

$$W(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 0, & \text{if } |\omega_x| < \Omega_x \text{ and } |\omega_y| < \Omega_y \\ 1, & \text{other } \omega_x, \omega_y \end{cases} ; \quad (2.15)$$

- для області просторових частот у формі круга радіусом Ω :

$$W(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega_x^2 + \omega_y^2 < \Omega^2 \\ 1, & \text{other } \omega_x, \omega_y \end{cases} . \quad (2.16)$$

Просторові характеристики, що відповідають (2.15) і (2.16), можна записати як результат віднімання з двовимірної δ -функції просторової характеристики відповідного ідеального фільтра нижніх просторових частот.

Ідеальний смуговий фільтр є призначеним для "ідеального" видалення значень просторового спектра зображення *за межами* заданої області просторових частот, яка не містить нульову просторову частоту. Ідеальний режекторний фільтр є призначеним для "ідеального" видалення значень просторового спектра зображення *всередині* заданої області просторових частот, яка не містить нульову просторову частоту. Смуговий і режекторний фільтри можуть розглядатися як послідовне з'єднання фільтра нижніх частот і фільтра верхніх частот з відповідним вибором областей просторових пригнічуваних частот. Просторові характеристики зазначених фільтрів можна отримати в результаті комбінування відповідних просторових характеристик ідеальних фільтрів нижніх і верхніх просторових частот.

Лінійні просторово-інваріантні фільтри зазвичай використовують із метою видалення адитивного просторового шуму із зображення. Це має таке обґрунтування [2]. Зазвичай спектр корисного зображення зосереджений у вузькій області просторових частот, тоді як спектр шуму рівномірно займає усю область просторових частот. У цьому випадку "зашумлене" зображення можна поліпшити, якщо, наприклад, видалити ту частину його просторового спектра, яка розташована за межами зазначеної вузької області і яка майже цілком обумовлена шумом. Даний підхід є еквівалентним застосуванню певного ідеального просторового фільтра до "зашумленого" зображення. Але у результаті такої фільтрації можуть виникнути від'ємні нефізичні значення у відфільтрованому зображенні. Для усунення зазначеного недоліку замість ідеального фільтра можна застосувати деякий інший фільтр, який, з одного боку, забезпечує невід'ємність вихідних значень, і, з іншого – має просторово-частотну характеристику, яка є близькою до ідеальної. Зазначимо, що за допомогою описаного підходу цілком видалити адитивний шум із зображення неможливо.

На даний час великої популярності набули лінійні просторово-інваріантні фільтри зі скінченною просторовою імпульсною характеристикою, або просторові СІХ-фільтри [5]. При їх використанні фільтрація має не глобальний, а локальний характер, бо у процес фільтрації в кожен момент втягуються не усі, а тільки частина елементів зображення. Область зображення, з яким у даний момент "працює" просторовий СІХ-фільтр, визначається *апертурою* фільтра. Форма і

розмір апертури фільтра можуть бути різними, але традиційно застосовують апертури невеликих розмірів у формі прямокутника або круга. На апертурі фільтра задають двовимірну просторову функцію, яка визначає просторовий імпульсний відгук фільтра на точкову дію. Сам процес фільтрації полягає в тому, що просторовий СІХ-фільтр "ковзає" вихідним зображенням (або, навпаки, зображення "пропускається" через СІХ-фільтр), формуючи в кожен новий момент один новий елемент "відфільтрованого" зображення. Таким чином, цілком "відфільтроване" зображення буде отримане тільки після того, коли СІХ-фільтр "пройде" усе вихідне зображення. Даний словесний опис процесу фільтрації є описом процесу згортки (2.8), яка для випадку просторового СІХ-фільтра може бути реалізована на основі однієї з двох еквівалентних формул:

$$g(x, y) = \iint_D f(\xi, \eta) w(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = \iint_D f(x - \xi, y - \eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad , \quad (2.17)$$

де D – просторова область, обумовлена апертурою фільтра $w(x, y)$. Часто також вимагають, щоб виконувалася умова нормування:

$$\iint_D w(x, y) dx dy = 1 \quad , \quad (2.18)$$

що забезпечує рівність середніх рівнів яскравості початкового та "відфільтрованого" зображень (тому що ліва частина співвідношення (2.18) є просто коефіцієнтом передачі фільтра на нульовій просторовій частоті).

Визначаючи функцію $w(x, y)$, можна досягти тих чи інших властивостей фільтрації. Наприклад, якщо $w(x, y) > 0$, то фільтрація буде "усереднювальною" (низькочастотною); якщо функція $w(x, y)$ є знакозмінною, то фільтрація буде такою, що "підкреслює перепади яскравості" на зображенні (високочастотною).

Просторова фільтрація на основі СІХ-фільтрів має такі особливості:

- можлива фільтрація не усього зображення в цілому, а тільки його частини;
- можливе розпаралелювання процесу фільтрації;

- частотна характеристика просторових СІХ-фільтрів не є обмеженою за область просторових частот.

У практиці методів цифрової обробки зображень лінійні просторові СІХ-фільтри задаються дискретно у вигляді так званих *масок*, а сам процес просторової фільтрації іноді називають *маскуванням*. Наприклад, для проведення низькочастотної просторової фільтрації часто використовують такі маски:

$$w^{(1)} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad w^{(2)} = \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad w^{(3)} = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

де індекс угорі позначає просто номер маски. Очевидно, що для зазначених масок виконується умова нормування: $\sum_i \sum_j w(i, j) = 1$, а безпосередньо процес цифрової фільтрації реалізується за допомогою двовимірної дискретної згортки:

$$g(m, n) = \sum_{i=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 f(m-i, n-j) w(i, j) \quad . \quad (2.19)$$

Наприклад, якщо в якості w взяти маску $w^{(1)}$, то на основі (2.19) отримуємо, що чергове "відфільтроване" значення є середнє арифметичне від значень дев'яти елементів початкового зображення, один із яких є *центральним*, а інші 8 елементів – його околom; місце розташування центрального елемента визначає місце розташування нового "відфільтрованого" значення. Зазначені вище маски застосовуються для згладжування адитивного шуму на зображенні, причому вони не призводять до збільшення різкості (розділювальної здатності) зображення, а, навпаки, зазвичай погіршують її.

Лінійну просторово-інваріантну фільтрацію можна застосувати і для підкреслення границь перепадів яскравості на зображенні. В основі методів підкреслення границь лежать лінійні диференціальні чи псевдодиференціальні операції, що забезпечують підйом верхніх просторових частот (на противагу методам згладжування шумів, в основі яких лежать інтегральні операції).

Розглянемо підхід до підкреслення границь перепадів яскравості

методом побудови лінійного диференціального оператора. Так як застосування лінійного диференціального оператора до зображення не повинне залежати від напрямку в просторі (тобто він повинен давати скалярну, а не векторну функцію), то в якості такого інваріантного до напрямку диференціального оператора можна використати оператор Лапласа Δ :

$$\Delta[f(x, y)] = \nabla^2[f(x, y)] = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \quad . \quad (2.20)$$

Тоді зображення $f_{\text{рез}}(x, y)$ з "підкресленими границями" можна побудувати так [7]:

$$f_{\text{рез}}(x, y) = f(x, y) - \beta \Delta[f(x, y)] \quad , \quad (2.21)$$

де $\beta \geq 0$ – певний коефіцієнт, підбором значення якого можна перерозподілити внески низьких і високих просторових частот у результуючому зображенні $f_{\text{рез}}(x, y)$ з метою підвищення його суб'єктивної чіткості. При використанні (2.21) варто враховувати, що: 1) середня яскравість результуючого зображення не зміниться; 2) значення β повинне бути невеликим за величиною; 3) можуть бути отримані від'ємні "нефізичні" значення.

Підкреслення границь перепадів яскравості на цифрових зображеннях можна здійснити також за допомогою СІХ-фільтрації із застосуванням високочастотних масок:

$$w^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad w^{(5)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad w^{(6)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} .$$

Зрозуміло, що після застосування цих масок середня яскравість зображення не зміниться, але також можуть бути отримані від'ємні значення.

Для виділення границь перепадів яскравості на цифрових зображеннях зазвичай застосовують псевдодиференціальні оператори (які реалізують за допомогою лінійної просторово-інваріантної

фільтрації) у сполученні з певними простими нелінійними операціями (наприклад, операціями обчислення модуля і бінарного квантування). Хоча в цілому цей підхід реалізує нелінійну фільтрацію, але його основна частина побудована на лінійних перетвореннях, і тому його буде розглянуто нижче.

Псевдодиференціальні оператори засновані на кінцево-різницевій апроксимації перших і других просторових похідних і виконують своєрідне "дискретне диференціювання" цифрового зображення. Серед найбільш відомих операторів можна вказати такі (задаються двома масками) [2,6]:

- оператор Робертса

$$h_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad h_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

- оператор Превіта

$$h_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad h_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

- оператор Собела

$$h_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad h_2 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, що кожна з цих масок видалить постійний фон із зображення (бо $\sum_i \sum_j h(i, j) = 0$).

Алгоритм виділення границь перепадів яскравості будують так. Спочатку за допомогою масок h_1 і h_2 (окремо!) виконують лінійні фільтрації вихідного зображення, у результаті яких отримують два нових зображення, наприклад, g_1 і g_2 відповідно. Потім формують результуюче зображення g за формулою: $g = |g_1| + |g_2|$ або за формулою:

$g = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$, яке представляє напівтонове зображення границь перепадів яскравості. Після цього виконують бінаризацію (бінарне квантування) результуючого зображення g , отримуючи бінарне зображення відповідних границь перепадів яскравості. Даному алгоритму часто передуює етап низькочастотної фільтрації для згладжування даних (метод Марра – Хилдрета [7]), а закінчують етапами медіанної і морфологічної фільтрації бінарного зображення з метою видалення імпульсних перешкод і стоншення лінії границі.

Псевдодиференціальним оператором, заснованим на кінцево-різницевої апроксимації других часткових просторових похідних, є так звана маска оператора Лапласа. Існує кілька варіантів цієї маски, наприклад [2,7]:

$$h^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}; \quad h^{(2)} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}; \quad h^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для цих масок виконується властивість рівності нулю суми усіх елементів маски, тобто після застосування кожної з цих масок постійний фон із зображення буде вилучений. Відома також розширена маска оператора Лапласа, що будується блоками 3×3 [7]:

$$h = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.3. Нелінійна просторова фільтрація

Якщо оператор A , що діє у просторовій області, є нелінійним, то говорять про нелінійну просторову фільтрацію зображення. На відміну від випадку лінійної фільтрації, загальної теорії нелінійної фільтрації не існує [7]. Найбільш відомими нелінійними фільтрами є медіанні, гомоморфні та морфологічні фільтри, фільтри на порядкових статистиках, узагальнені усреднювальні фільтри, нелінійні усреднювальні фільтри, нелінійні усреднювальні фільтри в комбінації з порядковими статистиками [1–9]. Крім того, до нелінійної фільтрації відносять процеси отримання автокореляційної функції, різні нелінійні перетворення просторового спектра зображення, кепстральну фільтрацію [2]. До нелінійної фільтрації відносять і різні евристичні підходи до просторової обробки зображень, наприклад, евристичні методи видалення шуму [2], клітинної логіки й ін. [6].

Нелінійна фільтрація може виконуватися *глобально*, тобто застосовуватися одразу до всього зображення, або *локально*, тобто застосовуватися тільки до частини зображення. На практиці найбільш часто використовується локальний підхід; у цьому випадку цілком "відфільтроване" зображення отримують тільки після того, коли нелінійний фільтр "обійде" усе початкове зображення. Такий підхід до отримання "відфільтрованого" зображення можна формалізувати так:

$$g(x, y) = \mathbf{N}[f(x + \xi, y + \eta)]; \quad (\xi, \eta) \in D, \quad (2.22)$$

де $\mathbf{N}[\dots]$ – певний нелінійний оператор, який є заданим на локальній області D зображення $f(x, y)$. Часто область D задають у формі прямокутника або круга так, щоб точка (x, y) була розташована в її центрі. Наприклад, при виборі D у формі прямокутника $[-X, X] \times [-Y, Y]$ отримуємо, що усі точки (ξ, η) належать прямокутнику $[-X, X] \times [-Y, Y]$. У цьому випадку, згідно з (2.22), одне "відфільтроване" значення $g(x, y)$ отримується в результаті нелінійного перетворення значень зображення $f(x, y)$, взятих із прямокутного *околу* точки (x, y) .

У дискретному випадку замість (2.22) будемо використовувати співвідношення:

$$g(m,n) = \mathbf{N}[f(m+i, n+j)]; \quad (i, j) \in D_z \subset Z^2 = Z \times Z, \quad (2.23)$$

яке іноді будемо записувати й у таких позначеннях

$$g_{m,n} = \mathbf{N}[f_{m+i, n+j}]; \quad (i, j) \in D_z \subset Z^2, \quad (2.24)$$

де D_z є звуження області D на задану скінченну множину Z^2 дискретних точок площини. Надалі будемо розглядати тільки операцію звуження на прямокутну сітку з еквідістантним розташуванням її вузлів уздовж координатних осей.

Далі розглянемо кілька основних класів локальних нелінійних фільтрів.

2.3.1. Нелінійні усереднювальні фільтри

Клас нелінійних усереднювальних фільтрів (Nonlinear Mean Filters) містить у собі лінійні, гомоморфні, узагальнені усереднювальні й інші види фільтрів. У дискретному випадку ці фільтри описують співвідношенням [7]:

$$g(m,n) = \mathbf{U}^{-1} \left[\frac{\sum_i \sum_j a(i, j) \mathbf{U}[f(m+i, n+j)]}{\sum_i \sum_j a(i, j)} \right]; \quad (i, j) \in D_z, \quad (2.25)$$

де $g(m,n)$ – результуюче значення, $a(i,j)$ – вагові коефіцієнти, $\mathbf{U}[\dots]$ – однозначна аналітична функція, що має обернену функцію $\mathbf{U}^{-1}[\dots]$, $f(i,j)$ – вхідне значення первісного зображення. Співвідношення (2.25) визначає такий алгоритм. Спочатку усі ті значення вхідного зображення, що потрапили в задану локальну область D_z , піддають нелінійному перетворенню $\mathbf{U}[\dots]$, потім отримані значення множать на відповідні вагові коефіцієнти, підсумовують, утворюючи одне значення, яке ділять на суму вагових коефіцієнтів, після чого до отриманого значення застосовують нелінійне перетворення $\mathbf{U}^{-1}[\dots]$.

На основі (2.25) можна отримати різні фільтри. Розглянемо деякі з них.

Нехай $a(i,j)=\text{const}$ для усіх $(i,j) \in D_z$. Тоді з (2.25) отримуємо клас узагальнених гомоморфних фільтрів [7]. Залежно від перетворення $U[\dots]$, можна вказати такі окремі випадки узагальнених гомоморфних фільтрів:

- якщо $U[f]=f$, то отримуємо *лінійний* усереднювальний (низькочастотний) фільтр, який на своєму виході дає арифметичне середнє g_Σ усіх вхідних виборок;

- якщо $U[f]=1/f$, то отримуємо *гармонійний* усереднювальний фільтр, що на виході дає гармонійне середнє g_H усіх вхідних виборок;

- якщо $U[f]=\log(f)$, то отримуємо *гомоморфний* усереднювальний фільтр, що на виході дає геометричне середнє g_G усіх вхідних виборок;

- якщо $U[f]=(f)^p$, де $p \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 0, 1\}$, то отримуємо так званий L_p -усереднювальний фільтр, що на виході дає L_p -середнє g_{L_p} усіх вхідних виборок.

Наприклад, для нелінійності виду $U[f]=\log[f]$ на виході гомоморфного усереднювального фільтра отримуємо (для простоти розглядаємо випадок одновимірної вибірки довжини N):

$$g = \exp \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log(f_i) \right] = \exp \left[\log \left[\left(\prod_{i=1}^N f_i \right)^{\frac{1}{N}} \right] \right] = \sqrt[N]{(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_N)},$$

що є геометричним середнім вхідних значень.

Якщо вагові коефіцієнти $a(i,j)$ не покладати рівними константі, то можна отримати інші класи нелінійних усереднень, що можуть забезпечити наявність бажаних характеристик для відфільтрованого зображення. Одним із корисних нелінійних усереднень цього класу є контрагармонійне середнє [7]:

$$g_{CH_p} = \frac{\sum_i \sum_j f^{(p+1)}(i,j)}{\sum_i \sum_j f^p(i,j)}, \quad (2.26)$$

яке може бути інтерпретоване як арифметичне середнє з вагами, заданими у вигляді: $a(i,j) = f^p(i,j)$. Контрагармонійну фільтрацію при $p=1$ можна використовувати, наприклад, для автоматичного вибору

значення порога (як певного "узагальненого середнього" значення) при рішенні задачі бінаризації напівтонового зображення, спотвореного імпульсними перешкодами.

Зазначені нелінійні фільтри з погляду відношень їх входів і виходів задовольняють таким умовам [7]:

$$f_{\min} \leq g_{CH-p} \leq g_{L-p} \leq g_H \leq g_G \leq g_{\Sigma} \leq g_{L-p} \leq g_{CH-p} \leq f_{\max}, \quad (2.27)$$

де f_{\min} і f_{\max} – мінімальне і максимальне значення на вході фільтра. Це означає, що вироблюване нелінійним усереднювальним фільтром вихідне значення буде знаходитися в діапазоні вхідних значень, а саме: поміж мінімальним і максимальним вхідними значеннями. Зазначимо, що фільтри, що виробляють f_{\min} , g_{CH-p} , g_{L-p} , g_H чи g_G , ефективно видаляють імпульсний шум типу "salt" ("сіль"), а фільтри, що виробляють g_{L-p} , g_{CH-p} чи f_{\max} , ефективно видаляють імпульсний шум типу "pepper" ("перець") [7].

2.3.2. Фільтри на порядкових статистиках

У практиці цифрової обробки сигналів і зображень широко застосовуються фільтри на порядкових статистиках (Order Statistic Filters) [7-9]. Аналогом даного виду фільтрації для випадку неперервних зображень є *квантильна* фільтрація. Як відомо, квантиль є однією з числових характеристик випадкових величин. Квантилем, що відповідає заданому рівню імовірності P , називають таке значення випадкової величини $z=z_p$, при якому функція розподілу $F(z)$ набуває значення P , тобто $F(z_p)=P$. Квантильна фільтрація, виконувана, наприклад, над прямокутним фрагментом $[-X, X] \times [-Y, Y]$ неперервного зображення $f(x,y)$, зводиться до пошуку $g(x,y)$, що задовольняє рівнянню [8]: $F(g(x,y))=P(f(x+\xi, y+\eta) < g(x,y))=P$, де $\xi \in [-X, X]$; $\eta \in [-Y, Y]$; $0 \leq P \leq 1$ – квантиль порядку P . Рішення цього рівняння зводиться до пошуку локальної щільності розподілу імовірностей $p(f(x,y))$ у точці $(x,y) \in [-X, X] \times [-Y, Y]$ зображення $f(x,y)$ по площі його фрагмента розміром $2X \times 2Y$, тобто тривимірної функції $P=p(x,y,z)$, визначенню зворотної функції по відношенню до аргументу z , тобто функції виду $z=p^{-1}(x,y,P)$, і

виконанню нелінійного перетворення квантиля порядку P , заданого як параметр фільтра [8]. При $P=0,5$ фільтрація називається медіанною, при $P \in \{0,25; 0,50; 0,75\}$ – квантильною, при $P \in \{0,1; 0,2; \dots; 0,9\}$ – десятичною, при $P \in \{0,01; 0,02; \dots; 0,99\}$ – процентильною і т.д.

Поняття порядкової статистики застосовується до дискретної вибірки даних скінченної довжини. Нехай дано деяку скінченну вибірку. Перегрупуємо елементи вибірки, розставляючи їх у порядку зростання значень. У результаті отримуємо *впорядковану* (чи *ранжовану* в зростаючому порядку) вибірку, яку називають *вектором порядкових статистик*, а елементи цього вектора – *порядковими статистиками* [9]. Наприклад, якщо вхідна вибірка значень є $(-1,2,1,3,-5,0,5)$, то їй відповідає вектор порядкових статистик $(-5,-1,0,1,2,3,5)$. *Рангом* елемента вихідної вибірки називається порядковий номер цього елемента у векторі порядкових статистик, тобто ранг – це просто номер порядкової статистики. Так, елемент зі значенням 2 є 5-ою порядковою статистикою, тобто його ранг дорівнює 5. Якщо значення елементів вибірки замінити рангами цих елементів, то отримуємо *ранговий вектор*. Для розглянутого приклада ранговий вектор є $(2,5,4,6,1,3,7)$. Очевидно, що будь-яке монотонно неспадне перетворення (наприклад, x^n , $\ln(1+x)$ і т.п.) не змінює рангового вектора. Довільна функція від рангового вектора називається *ранговою статистикою*, а алгоритм, у якому вона використовується, – *ранговим*. Вхідну вибірку можна відновити, якщо є відомими вектор порядкових статистик і ранговий вектор.

Іноді вектор порядкових статистик перетворюють шляхом *зрізання*, *вінзоровання* або *цензурування* [9]. Ці підходи застосовують для одержання *робастних* алгоритмів обробки.

Зрізання вибірки полягає в тому, що розглядають не усі елементи вектора порядкових статистик, а тільки ті з них, що попадають у заданий інтервал $[a,b]$, а усі інші елементи відкидаються. Для розглянутого вище прикладу зрізання вибірки інтервалом $[-2,2]$ дає зрізаний вектор порядкових статистик $(-1,0,1,2)$. Очевидно, якщо значення вхідної вибірки випадкові, то при зрізанні випадковими є не тільки елементи зрізаної вибірки, але й її розмір.

Вінзоровання вибірки полягає в тому, що ті елементи вибірки, значення яких менше a , замінюють на a , а ті елементи, значення яких

більше b , замінюють на b . Для розглянутого вище прикладу вінзоровання інтервалом $[-2,2]$ дає вектор порядкових статистик $(-2,-1,0,1,2,2,2)$.

Цензурування вибірки полягає в тому, що елементи вхідної вибірки спочатку впорядковують, а потім відкидають l перших і q останніх елементів. Для розглянутого вище прикладу цензурування при $l=1$ і $q=1$ дає вектор порядкових статистик $(-1,0,1,2,3)$.

Зрізання і вінзоровання можуть виконуватися під час одержання елементів вибірки і після її одержання, а цензурування – тільки після одержання усієї вибірки. Відомо, що відкидання до 30 % вибіркових значень знижує ефективність відповідних алгоритмів обробки тільки на одиниці відсотків [9].

У практиці цифрової обробки сигналів і зображень використовують як фільтри, що засновані на обчисленні i -тої порядкової статистики (які іноді називають ранговими фільтрами), так і фільтри, що засновані на операціях зрізання, вінзоровання і цензурування [7; 9]. Обґрунтування застосовності зазначених фільтрів залежить від постановки конкретної задачі. Наприклад, нехай необхідно *автоматично* знаходити максимальне значення в певній вибірці даних в умовах, коли значення елементів у вибірці змінюються досить повільно, але існує ненульова імовірність збоїв у роботі аналого-цифрового перетворювача (АЦП), що формує вибірку. Тоді вигідно брати не власне максимальне значення вибірки, а попереднє до нього значення в упорядкованій послідовності, тобто передостанню порядкову статистику. Така обробка буде давати значення, яке з більшою імовірністю є близьким до дійсно максимального значення вибірки, а не те, що може відповідати випадковому "викиду" через збій у роботі АЦП. Якщо імовірність збоїв у роботі АЦП велика, то можна використовувати ще менші за номером значення в упорядкованій послідовності.

Застосування фільтрів на порядкових статистиках не призводить до розширення діапазону значень. Це означає, що якщо f_{\min} і f_{\max} – мінімальне і максимальне значення на вході фільтра, а g – вихідне значення фільтра, то завжди буде виконуватися нерівність: $f_{\min} \leq g \leq f_{\max}$. Зазначимо також, що будь-яка порядкова статистика завжди обчислюється однозначно.

2.3.3. Медіанна фільтрація

Широко відомим представником класу фільтрів на порядкових статистиках (рангових фільтрів) є медіанний фільтр [2; 4–8]. Фільтрація, заснована на застосуванні медіанного фільтра, має локальний характер і реалізується шляхом "ковзання" медіанного фільтра зображенням. Медіанна фільтрація є традиційним і часто використовуваним на практиці способом усунення імпульсних перешкод.

У дискретному випадку медіанна фільтрація полягає в пошуку медіани вибірки. Для цього вибірка спочатку упорядковується, після чого вибирається або *середнє за номером* значення (при непарному числі елементів у вибірці), або середнє арифметичне значення двох сусідніх "середніх за номером" елементів вибірки (при парному числі елементів у вибірці), а саме:

$$\text{med}(f) = \begin{cases} f_{(i+1)} & ; \quad n = 2i + 1 \\ \frac{1}{2}(f_{(i)} + f_{(i+1)}) & ; \quad n = 2i \end{cases} , \quad (2.28)$$

де $\text{med}(f)$ позначає медіану вибірки f ; $f_{(i)}$ позначає i -ту порядкову статистику; n – довжина вибірки, для якої обчислюється медіана. Зазвичай при реалізації медіанного фільтра довжину вибірки n задають непарним і невеликим за величиною числом. Існують різні види медіанних фільтрів.

Стандартний (нерекурсивний) медіанний фільтр для одновимірної вибірки f описують формулою:

$$g_i = \text{med}(f_{i-\nu}, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+\nu}) , \quad (2.29)$$

де f_i – центральний елемент вхідної вибірки, разом з яким у процес фільтрації втягуються ν елементів вхідної вибірки ліворуч і ν елементів вхідної вибірки праворуч від нього; g_i – результуючий елемент як медіана вхідної вибірки. Згідно з (2.29), вікно медіанного фільтра має розмір $n=(2\nu+1)$, а безпосередньо сама медіанна фільтрація полягає в упорядкуванні вхідної вибірки в порядку зростання значень її елементів і виборі в якості результату значення того елемента, що буде знаходитися в центральній позиції (тобто $g_i=f_{(i)}$). Наприклад, нехай дано

вхідну вибірку з 7 елементів: (1,3,1,2,4,2,2). Застосовуючи до цієї вибірки одновимірний медіанний фільтр із вікном $n=3$ і не обробляючи крайні елементи, отримаємо результат у вигляді вибірки (1,1,2,2,2,2,2).

Рекурсивний медіанний фільтр втягує в обробку тільки-но обчислені вихідні елементи g_{i-v}, \dots, g_{i-1} разом з неопрацьованими елементами $f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+v}$ і для одновимірної вхідної вибірки описують формулою:

$$g_i = \text{med}(g_{i-v}, \dots, g_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_{i+v}) . \quad (2.30)$$

Вихідні елементи, отримані після обробки рекурсивним медіанним фільтром, будуть більш корельованими, ніж після обробки стандартним медіанним фільтром, бо що елементи g_{i-v}, \dots, g_{i-1} дають прямий внесок в обчислення g_i .

Медіанний фільтр можна використовувати послідовно кілька разів; якщо при цьому результат перестає змінюватися, то такий результат називають інваріантним до медіанної фільтрації.

Двовимірний нерекурсивний медіанний фільтр для вхідної двовимірної вибірки f описують формулою:

$$g_{i,j} = \text{med}(f_{i+r,j+s}); \quad (r,s) \in D_z , \quad (2.31)$$

де множина D_z визначає сусідів центрального елемента $f_{i,j}$, включаючи і його самого. Дану множину D_z часто називають вікном, або *апертурою*, фільтра (рис. 2.1).

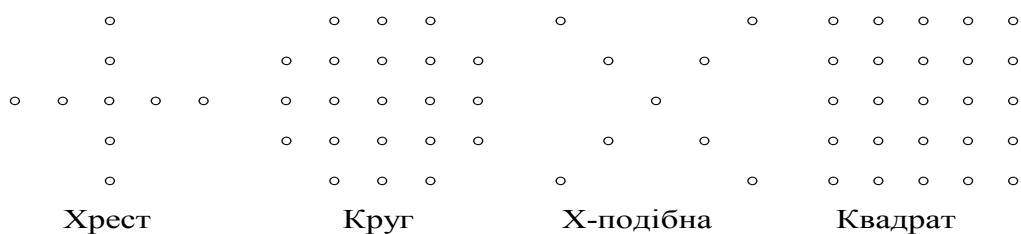


Рис. 2.1. Приклади двовимірних вікон розміром 5×5 елементів

Одним з видів двовимірних медіанних фільтрів є псевдомедіанний фільтр. Він реалізується таким чином: спочатку виконується пошук

медіан у кожному рядку зображення, а потім – пошук медіани серед знайдених медіан (або навпаки: спочатку виконується пошук медіан у стовпцях зображення, а потім – пошук медіани серед знайдених медіан). При такому підході істотно зменшується число порівнянь, необхідних для сортування значень, і забезпечується близькість до результату стандартної двовимірної медіанної фільтрації [8].

Максимально-медіанний фільтр заснований на комбінуванні операцій обчислення медіани й обчислення максимуму, що має таке обґрунтування. Медіанна фільтрація припускає, що елементи, які сусідять з центральним елементом, є або постійними, або граничними (тобто вони задають або постійний рівень яскравості, або перепад яскравості). На практиці це припущення часто порушується, бо зображення, яке є найбільш прийнятним для людського ока, повинне мати багато дрібних деталей у вигляді тонких ліній і гострих кутів. Такі деталі звичайно руйнуються медіанним фільтром з відносно великим вікном (наприклад, більшим ніж 5×5 елементів). Менш "руйнівним" є максимально-медіанний фільтр, який реалізують такою схемою: спочатку знаходять медіани для центрального стовпця, центрального рядка та двох діагоналей, після чого обчислюють максимальне значення серед отриманих значень медіан. Відомо [7], що такий фільтр дозволяє краще зберегти інформацію про сусідні елементи, ніж стандартний медіанний фільтр, хоча операція обчислення максимуму і призводить до певної "асиметрії" результатів, тому що середнє вихідне значення виявляється зсунутим.

Гібридний медіанний фільтр є комбінацією медіанного фільтра і набору лінійних фільтрів. Для одномірного випадку гібридний медіанний фільтр описують співвідношенням [7]:

$$g_i = \text{med}(\varphi_1(f_i), \varphi_2(f_i), \dots, \varphi_M(f_i)) \quad , \quad (2.32)$$

де $\varphi_j(f_i)$; $j=1, \dots, M$ – певний просторовий СІХ- або БІХ-фільтр. Наприклад, одновимірний гібридний медіанний фільтр, побудований на основі двох усереднювальних СІХ-фільтрів, має вигляд:

$$g_i = \text{med} \left(\frac{1}{v} \sum_{k=1}^v f_{i-k}, f_i, \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v f_{i+k} \right). \quad (2.33)$$

Цей фільтр зберігає границі й є ефективним при наявності адитивного шуму. Рекурсивний фільтр, аналогічний (33), має вигляд:

$$g_i = \text{med} \left(\frac{1}{v} \sum_{k=1}^v g_{i-k}, f_i, \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v f_{i+k} \right). \quad (2.34)$$

У двовимірному випадку гібридний медіанний фільтр можна описати так [7]:

$$g_{i,j} = \text{med}(z_{i,j}^N, z_{i,j}^S, z_{i,j}^E, z_{i,j}^W, f_{i,j}) , \quad (2.35)$$

де $z_{i,j}^N, z_{i,j}^S, z_{i,j}^E, z_{i,j}^W$ – результати СІХ-фільтрації в північному, південному, східному і західному напрямках відповідно до центрального відліку $f_{i,j}$. Зокрема, у випадку застосування СІХ-фільтра, який обчислює середнє значення за вказаними напрямками, можна записати:

$$g_{i,j} = \text{med} \left(\frac{1}{v} \sum_{k=1}^v f_{i,j-k}, \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v f_{i,j+k}, \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v f_{i-k,j}, \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v f_{i+k,j}, f_{i,j} \right). \quad (2.36)$$

Зазначимо, що медіана є значенням, відносно якого досягається мінімум суми модулів різниць між значеннями вибірки і власне медіаною [1]. У зв'язку з цим обґрунтування застосовності медіанної фільтрації для рішення конкретних задач варто шукати в тому, наскільки ці задачі задовольняють зазначеному критерію.

Розглянуті фільтри не вичерпують усієї множини відомих фільтрів, застосовуваних для рішення задач покращення зображень.

Контрольні питання

1. Чи призводить зміна просторового складу зображення до зміни його просторового спектра?
2. Яка мета просторової фільтрації зображень?
3. Які задачі можна вирішувати за допомогою фільтрації зображень?
4. Чи можна розглядати задачу підвищення контрасту зображення як задачу фільтрації?
5. Як у загальному вигляді описати процес фільтрації напівтонового зображення?
6. У чому відмінність лінійної просторово-залежної фільтрації від лінійної просторово-інваріантної фільтрації?
7. Дайте інтерпретацію співвідношенню (2.12).
8. Чому за допомогою ідеальної фільтрації неможливо цілком подавити адитивний просторовий шум на зображенні?
9. Запишіть функцію, що описує двовимірну просторову характеристику ідеального смугового фільтра, а також функцію, що описує ідеальну режекцію просторових частот. Укажіть форму і розміри областей просторових частот, для яких записані формули є справедливими.
10. Наведіть свої приклади низькочастотних і високочастотних масок.
11. Як вирішують задачу виділення границь перепадів яскравості на цифровому зображенні?
12. Яку кінцево-різницеву апроксимацію реалізують маски Собела?
13. Яку кінцево-різницеву апроксимацію реалізує маска Лапласа?
14. Яку задачу вирішують нелінійні усереднювальні фільтри? Що можна обчислити за допомогою (2.25)?
15. Порівняйте (2.19) і (2.25) і вкажіть, як співвідносяться просторові характеристики $w(i,j)$ і $a(i,j)$ для випадку, коли $U[f]=f$.
16. Що означає квантильна фільтрація і чи зв'язана квантильна фільтрація з еквалізацією локальної щільності імовірності?
17. Скільки буде потрібно операцій порівняння для обчислення першої порядкової статистики при обробці напівтонового зображення з використанням квадратної апертури розміром $N \times N$?
18. Скільки буде потрібно операцій порівняння для обчислення останньої порядкової статистики при обробці напівтонового

- зображення з використанням квадратної апертури розміром $N \times N$?
19. Скільки буде потрібно операцій порівняння для обчислення медіани при обробці напівтонового зображення з використанням квадратної апертури розміром $N \times N$?
 20. З якою метою застосовуються операції зрізання, вінзорування та цензурування вихідної вибірки?
 21. Опишіть зрізаючий фільтр на i -тій порядковій статистиці.
 22. Опишіть вінзуючий фільтр на i -тій порядковій статистиці.
 23. Опишіть цензуючий фільтр на i -тій порядковій статистиці.
 24. Опишіть двовимірний рекурсивний медіанний фільтр.
 25. Наведіть формальний опис псевдомедіанного фільтра.
 26. Наведіть формальний опис максимально-медіанного фільтра.
 27. Вкажіть апертуру гібридного медіанного фільтра (2.36).
 28. Наведіть свій варіант гібридного медіанного фільтра.
 29. Включіть в (2.25) операцію упорядкування значень $U[f(m+i, n+j)]$ і переписіть (2.25) у відповідній формі.
 30. Переписіть (2.25) для неперервного випадку.

Лабораторна робота № 2

Тема: *Методи просторової фільтрації зображень*

Мета: Вивчення методів просторової фільтрації зображень

Завдання до лабораторної роботи

Завдання 1. Вивчення методів послаблення просторового шуму на зображеннях.

1.1. Отримати у викладача набір тестових зображень відповідно до номера свого варіанта.

Набір складається з 9 цифрових зображень. Кожне зображення має розмір 128x128 пікселів і записане у файлі формату *.bmp. Імена файлів починаються символами gis, а наступні цифри вказують на номер варіанту завдання і номер зображення. Наприклад, ім'я gis28.bmp означає "варіант 2 зображення номер 8", а ім'я gis208.bmp означає "варіант 20 зображення номер 8". Номера зображень мають таке значення:

зображення номер 0 – тестове зображення без шуму;

зображення номери 1 і 2 – тестові зображення в адитивному шумі різної дисперсії;

зображення номери 3 і 4 – тестові зображення в імпульсному шумі;

зображення номери 5 і 6 – тестові зображення у просторово-нестационарному адитивному шумі, дисперсія якого залежить від рівня яскравості;

зображення номери 7 і 8 – тестові зображення у просторово-нестационарному адитивному шумі, дисперсія якого є функцією просторових координат.

1.2. Оцінити "зашумленість" кожного зображення шляхом обчислення величини $\varepsilon_k^2 = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |f_k(i, j) - f_0(i, j)|^2$, де індекс $k=0, \dots, 8$ задає номер зображення і де $f_0(i, j)$ – тестове зображення без шуму. Результати розрахунків представити у вигляді таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Оцінка "зашумленості" зображення

| | Номер зображення | | | | | | | | |
|--|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Середній квадрат "зашумленості" зображення ε_k^2 | 0,0 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

1.3. Вибрати для подальшої роботи не менш ніж 3 лінійних і 7 нелінійних фільтрів і застосувати їх до зображення $f_0(i, j)$ (границі зображення можна не обробляти). Після цього оцінити спотворення тестового зображення $f_0(i, j)$ кожним з обраних фільтрів шляхом обчислення величини $\varepsilon_{A0}^2 = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |g(i, j) - f_0(i, j)|^2$, де $g(i, j) = \mathbf{A}[f_0(i, j)]$ – результат фільтрації тестового зображення $f_0(i, j)$ обраним фільтром \mathbf{A} .

1.4. Застосувати до усіх інших зображень обрані лінійні й нелінійні фільтри (границі зображень можна не обробляти) і візуально оцінити якість фільтрації оцінками "відмінно", "добре", "задовільно", "погано", "дуже погано".

У зазначеній таблиці вказати тип фільтра, форму і розмір його апертури, а також (при необхідності) значення вагових коефіцієнтів, заданих на апертурі фільтра.

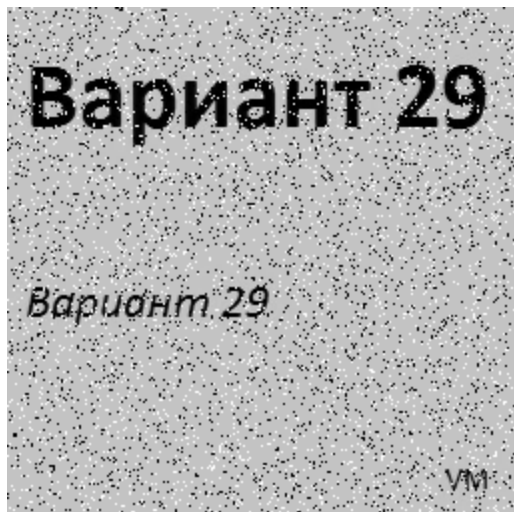
Завдання 2. Вивчення методів підкреслення границь перепадів яскравості на напівтонових зображеннях.

Виконати обробку тестових зображень з метою підкреслення границь перепадів яскравості на цих зображеннях, проміжними результатами якої є:

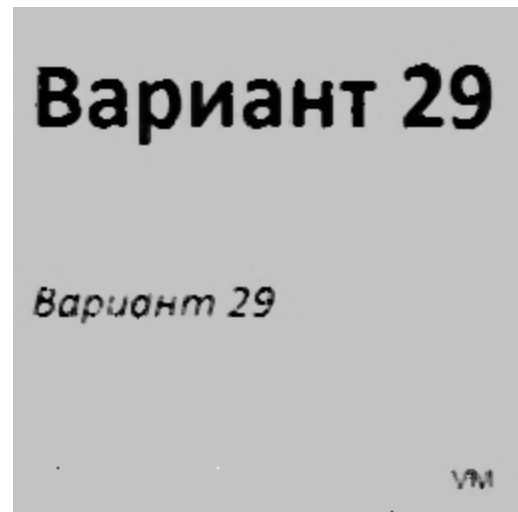
- виділення границь перепадів яскравості;
- усунення шуму;
- комбінування зображення границь перепадів яскравості в початкових тестових зображеннях.

Дати обґрунтування використаних методів обробки, опис алгоритмів і вказати значення основних параметрів обробки.

Результати представити у вигляді короткого звіту з описом виконаного завдання й у вигляді файлів з обробленими зображеннями (рис. 2.2).



Зображення, яке спотворене шумом «сіль та перець»



Зображення після фільтрації медіанним фільтром з квадратною апертурою 3x3

Рис. 2.2. Приклад обробки зображення

Література

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн. 1. – 312 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн. 2. – 480 с.
3. Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт; пер. с англ.; под ред. В.Л. Стефанюка. – М. : Мир, 1976. – 512 с.
4. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т.С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд, Г.Дж. Нуссбаумер и др. ; под ред. Т.С.Хуанга; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1984. – 224 с.
5. Яншин В.В. Обработка изображений на языке Си для IBM PC: Алгоритмы и программы / В.В. Яншин, Г.А. Калинин. – М. : Мир, 1994. – 242 с.
6. Распознавание образов и обработка изображений. Тематический выпуск /ТИИЭР. – 1979. – Т. 67. – № 5.
7. Venetsanopoulos A.N. Digital image processing and applications / Department of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, Canada, 1996. – 598 p.
8. Очин Е.Ф. Вычислительные системы обработки изображений. / Е.Ф. Очин. – Л. : Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1989. – 136 с.
9. Обработка сигналов в радиотехнических системах : учеб. пособие / Далматов А.Д., Елисеев А.А., Лукошкин А.П., Оводенко А.А., Устинов Б.В. ; под ред. А.П. Лукошкина. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 400 с.
10. Обработка изображений и цифровая фильтрация / под ред. Т. Хуанга.– М. : Мир, 1979. – 318 с.
11. Василенко Г.И. Восстановление изображений / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИ ВІДНОВЛЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Будь-яке реальне зображення є спотвореним. Спотворення можуть виявлятися у вигляді нерівномірної освітленості різних ділянок зображення, зміні його контрасту, "розмитті" дрібних деталей, наявності яскравих, темних та/або кольорових точок, ліній і смуг, "зернистості", "плямистості" і т.ін. У певних випадках спотворення бувають настільки значні, що виникає задача *відновлення* зображення.

Загальний підхід до рішення задач відновлення зображень полягає у побудові процесу обробки, що є зворотним процесу спотворення. Відповідно до загальної термінології [1–5], про задачу отримання спотвореного зображення із первісного зображення говорять як про *пряму* задачу, а про задачу відновлення зображення зі спотвореного зображення говорять як про *обернену* задачу [1–5].

У результаті рішення задачі відновлення отримують зображення, яке називають *оцінкою* шуканого зображення (бо будь-яке спотворене реальне зображення слід вважати випадковим, а не детермінованим). При постановці задачі відновлення вимагають, щоб одержувана оцінка була в певному розумінні *оптимальною* (найкращою) оцінкою. Для цього на основі різних фізичних міркувань формулюють критерій оптимальності і виражають його відповідним функціоналом, який необхідно оптимізувати. Прикладами таких критеріїв є: критерій мінімального середнього квадрата помилки, критерій мінімального середнього модуля помилки, критерій мінімуму максимального відхилення помилки, критерій максимуму ентропії, критерій мінімуму площі і т.д.

На практиці результат рішення задачі відновлення можна вважати успішним, якщо отримана оцінка в зазначеному критерієм розумінні буде *достатньо* близькою до шуканого зображення. Це означає, що розбіжність шуканого зображення і його оцінки буде меншою за певну малу величину, яку можна визначити наперед. Але шукане зображення заздалегідь є невідомим, і тому неможливо прямо оцінити міру такої розбіжності. В цих умовах міру розбіжності оцінюють побічно, вважаючи, наприклад, що вона буде досить малою за своєю величиною тоді, коли виконається певна умова методу відновлення, яка означає достатню близькість отриманої оцінки й оптимальної оцінки. У свою

чергу, оптимальність оцінки в більшості випадків дозволяє зробити висновок про гранично досягну величину близькості найоптимальнішої оцінки і шуканого зображення, що дозволяє оцінити якість відновлення в цілому. У випадку, коли зазначене побічне оцінювання якості відновлення зображень є неможливим, залучають метод рішення *аналогічних* задач, для яких точне рішення заздалегідь відоме. Останнім часом для оцінювання якості відновлення стали застосовуватися й експертні системи [3].

Існують різні види спотворень зображень, які звичайно поділяють на точкові, просторові, часові, хроматичні та їх комбінації [3]. Надалі в розгляді обмежимося випадком просторових спотворень зображень, причому тільки тих, що призводять до просторового "розмиття" зображення. Найбільш відомими видами таких спотворень є спотворення, обумовлені відносним рухом об'єкта зйомки (сцени) і камери, випадковим тремтінням об'єкта зйомки, атмосферною турбулентністю, дефокусировкою об'єктива, хмарами, дощем [3] і обмеженою роздільною здатністю системи формування зображень.

Рішення задач відновлення зображень для зазначеного класу просторових спотворень має значні труднощі, наявність яких характерна для рішення будь-яких обернених задач. Ці труднощі обумовлені, по-перше, необхідністю детального опису процесу формування спотвореного зображення. Так, у випадку лінійних систем формування зображень необхідною умовою для рішення задачі відновлення просторово "розмитих" зображень є отримання достатньо точної оцінки так званої *функції розсіювання точки* (ФРТ), яка описує відгук лінійної системи формування зображень на точкове джерело. Інші труднощі обумовлені *нестійкістю* рішення оберненої задачі до малих змін у вхідних даних.

Ключем до рішення задач відновлення "розмитих" зображень, як і інших аналогічних обернених задач, є *апріорна* інформація. Ця інформація включає відомості про оператор прямої задачі, про очікувані властивості рішення оберненої задачі і про похибки, з якими відомі оператор прямої задачі і вхідні дані. У більшості випадків залучення *значного* обсягу апріорної інформації дозволяє виконати *коректну* постановку оберненої задачі і знайти її розв'язок [5]. Стосовно до задачі відновлення зображень часто вважають, що оператор прямої задачі,

який описує процес формування зображення, є лінійним оператором згортки, похибки мають випадковий і адитивний характер, а шукане зображення має набір природних властивостей. Наприклад, природними властивостями візуальних зображень є властивості їх невід'ємності й обмеженості у просторі. Іноді можуть використовуватися й інші апіорні відомості, наприклад, відомості про симетричність зображення, про мінімальний і максимальний рівні яскравості зображення, про відсутність швидких змін яскравості зображення й ін. [1–5].

Методи відновлення зображень характеризуються значною складністю й у більшості випадків реалізуються трудомісткими ітераційними та/або нелінійними алгоритмами. У даній лабораторній роботі будуть розглянуті тільки найпростіші методи відновлення "розмитих" напівтонових статичних зображень, засновані на лінійній оптимальній фільтрації Вінера, а також на її різних окремих випадках і узагальненнях [1–6].

3.1. Загальні відомості

Рішення задачі відновлення зображення є неможливим без вивчення процесів його формування і реєстрації. У загальному вигляді процес формування і реєстрації зображення можна описати операторним рівнянням:

$$g(x,y)=\mathbf{A}[f(x,y)] \quad , \quad (3.1)$$

вважаючи, що оператор \mathbf{A} виконує певне перетворення вхідного зображення $f(x,y)$ у "спотворене" зображення $g(x,y)$ і сумарно описує ефекти його формування і реєстрації. Надалі будемо вважати, що процес реєстрації зображення описується строго монотонним "поточковим" перетворенням яскравості, і тому можлива його компенсація і вилучення з подальшого розгляду². В цих умовах

² Для цього можуть бути й інші чинники. Наприклад, реєстрація цифрової копії неперервного зображення виконується за допомогою нелінійної операції квантування значень яскравості неперервного зображення, яка не є строго монотонною операцією. Але якщо величина стандартного відхилення адитивного шуму на зображенні є більшою за одиницю молодшого розряду використовуваного АЦП,

оператор \mathbf{A} описує тільки процес формування зображень.

Задача відновлення вхідного зображення $f(x,y)$ за відомим спотвореним зображенням $g(x,y)$ може бути сформульована як обернена задача:

$$f(x,y)=\mathbf{A}^{-1}[g(x,y)] \quad , \quad (3.2)$$

де \mathbf{A}^{-1} – оператор, обернений за своєю дією операторові \mathbf{A} . При рішенні даної задачі необхідно бути впевненим, що, по-перше, її рішення дійсно існує, по-друге, воно є єдиним і, по-третє, воно є стійким до малих змін зображення $g(x,y)$. Для більшості практичних задач можна вважати, що перші дві умови виконуються автоматично, а третя – порушується. Для забезпечення стійкості рішення оберненої задачі (3.2) його піддають регуляризації (згладжуванню) [6].

Розрізняють нелінійні і лінійні моделі формування зображень. Якщо оператор \mathbf{A} є нелінійним оператором, то в цьому випадку говорять про нелінійну модель формування зображення. Якщо \mathbf{A} – лінійний оператор, то відповідну модель формування зображення називають лінійною.

Відмінною рисою нелінійних систем формування зображень є неможливість визначення їх характеристик за допомогою елементарних вхідних сигналів типу δ -функції. Аналіз нелінійної системи можна виконати на основі розвинення нелінійного оператора в ряд Вольтерра [5]:

$$\begin{aligned} g(x,y)=\mathbf{A}[f(x,y)]= & \iint f(\xi,\eta) h_1(x,y;\xi,\eta) d\xi d\eta + \\ & + \iiint f(\xi,\eta) f(\kappa,\lambda) h_2(x,y;\xi,\eta;\kappa,\lambda) d\xi d\eta d\kappa d\lambda + \\ & + \iiiii f(\xi,\eta) f(\kappa,\lambda) f(\mu,\nu) h_3(x,y;\xi,\eta;\kappa,\lambda;\mu,\nu) d\xi d\eta d\kappa d\lambda d\mu d\nu + \dots, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $h_1(x,y;\xi,\eta), h_2(x,y;\xi,\eta;\kappa,\lambda), \dots$ – ядра системи. Деякі нелінійні системи описуються досить точно першими двома членами ряду (3.3) або сумою звичайної лінійної системи з ваговою функцією $h_1(x,y;\xi,\eta)$ та "білінійної" системи з ваговою функцією $h_2(x,y;\xi,\eta;\kappa,\lambda)$ [5].

то ефектом квантування можна знехтувати у порівнянні з ефектом наявності шуму, і тому процес реєстрації можна вилучити з подальшого розгляду.

У класі лінійних систем формування зображень розрізняють лінійні просторово-залежні і лінійні просторово-незалежні (чи інваріантні до просторового зсуву) системи [1–5]. Типовим і найбільш розповсюдженим видом лінійних моделей систем формування зображень є лінійна інваріантна до просторового зсуву модель, яка описується рівнянням двовимірної просторової згортки:

$$g(x,y)=\mathbf{A}[f(x,y)]=\iint f(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta + n(x,y) , \quad (3.4)$$

де $n(x,y)$ – адитивний просторовий шум. В області просторових частот рівнянню (4) відповідає просте співвідношення між просторовими спектрами:

$$G(\omega_x, \omega_y)= F(\omega_x, \omega_y) H(\omega_x, \omega_y) + N(\omega_x, \omega_y) . \quad (3.5)$$

Рівняння (3.5) показує, що просторовий спектр $G(\omega_x, \omega_y)$ дорівнює добутку просторового спектра $F(\omega_x, \omega_y)$ вхідного зображення і просторово-частотної характеристики $H(\omega_x, \omega_y)$ системи формування зображень плюс просторовий спектр $N(\omega_x, \omega_y)$ шуму. З рівняння (3.5) видно, що просторовий спектр $G(\omega_x, \omega_y)$ вихідного зображення $g(x,y)$ може тільки тоді збігатися з просторовим спектром $F(\omega_x, \omega_y)$ вхідного зображення $f(x,y)$, коли для усіх просторових частот (ω_x, ω_y) , на яких визначено спектр $F(\omega_x, \omega_y)$, виконуються рівності: $H(\omega_x, \omega_y) \equiv 1$ (тобто система формування не вносить спотворень) і $N(\omega_x, \omega_y) \equiv 0$ (тобто шум відсутній). Але на практиці ці умови ніколи не виконуються.

Зазвичай вважають, що формуюча система вносить малі спотворення, якщо зображення на виході системи формування мало відрізняється від зображення на її вході. Величину цієї відмінності можна обчислювати по-різному, але найбільш часто її обчислюють у квадратичній метриці L_2 як квадрат відстані між функціями $g(x,y)$ і $f(x,y)$, а саме:

$$\rho_{L_2}(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y) - g(x, y)|^2 dx dy . \quad (3.6)$$

Для випадку лінійної просторово-інваріантної системи формування зображень, співвідношення (3.6) у просторово-частотній області має вигляд:

$$\rho_{L_2}(f, g) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - H(\omega_x, \omega_y)|^2 |F(\omega_x, \omega_y) - N(\omega_x, \omega_y)|^2 d\omega_x d\omega_y . \quad (3.7)$$

З (3.7) видно, що при відсутності шуму відстань ρ_{L_2} може бути малою з двох причин: 1) $H(\omega_x, \omega_y) \approx 1$ для усіх просторових частот (ω_x, ω_y) ; 2) $H(\omega_x, \omega_y) \approx 1$ тільки для деяких частот (ω_x, ω_y) , а для усіх інших частот (ω_x, ω_y) виконується $F(\omega_x, \omega_y) \approx 0$. Ясно, що перша "причина" практично не може бути реалізована, бо тоді була б отримана ідеальна система формування з нескінченно високою роздільною здатністю. Тому на практиці може бути реалізована тільки друга "причина", відповідно до якої система формування повинна відтворювати (передавати) без спотворень просторовий спектр вхідного зображення в тій області просторових частот, де він переважно зосереджений. За межами зазначеної області просторових частот значення просторово-частотної характеристики системи формування не важливі, тому що вони будуть множитися на нехтовно малі значення просторового спектра вхідного зображення.

За умов наявності шуму, вимогу "малості" спотворень, внесених на етапі формування зображень, варто доповнити вимогою "малості" рівня шумів, просторовий спектр яких потрапляє в межі тієї області просторових частот, які система формування може пропускати без спотворень. Тому, якщо область пропускання системи формування є занадто великою в порівнянні з областю просторових частот, де переважно зосереджений просторовий спектр вхідного зображення, то її варто зменшити, зменшуючи тим самим і спотворення, внесені шумом. Зазначимо, що форма такої області обов'язково буде прямокутною чи круговою.

Теоретично важливим є випадок, коли просторово-частотна характеристика системи формування має вигляд:

- для області просторових частот у формі прямокутника $[-\Omega_x, \Omega_x] \times [-\Omega_y, \Omega_y]$:

$$H(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \text{if } |\omega_x| \leq \Omega_x \text{ and } |\omega_y| \leq \Omega_y \\ 0, & \text{other } \omega_x, \omega_y \end{cases} ; \quad (3.8)$$

- для області просторових частот у формі круга радіусом Ω :

$$H(\omega_x, \omega_y) = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega_x^2 + \omega_y^2 \leq \Omega^2 \\ 0, & \text{other } \omega_x, \omega_y \end{cases} , \quad (3.9)$$

що відповідає так званим системам формування зображень з *ідеальним дифракційним обмеженням* [5]. Застосування формуючої системи з зазначеною просторово-частотною характеристикою призводить до просторового розмиття зображення за рахунок видалення усіх високочастотних компонентів (які, як відомо [1–2], відповідають за "дрібні деталі" на зображенні) із просторового спектра зображення. Крім того, на зображенні, сформованому такою системою, можлива поява негативних "нефізичних" значень яскравості.

Просторове розмиття зображення може бути обумовлено й іншими особливостями системи формування. Наприклад, розмиття може бути пов'язане із втратою фокуса, що призводить до швидкої зміни значень функції $H(\omega_x, \omega_y)$ у межах ширини спектра $F(\omega_x, \omega_y)$, причому функція $H(\omega_x, \omega_y)$ може приймати і нульові значення. Якщо ж $H(\omega_x, \omega_y)$ описується залежністю виду $H(\omega_x, \omega_y) = e^{-(\lambda\omega_x^2 + \mu\omega_y^2)}$, то в цьому випадку не відбувається повного видалення високочастотних компонентів зі спектра $F(\omega_x, \omega_y)$ (як у випадку ідеального дифракційного обмеження), але відбувається їх значне послаблення, що також призводить до розмиття зображення. Ще один вид просторового розмиття зображення виявляється як ефект "змазування" зображення уздовж деякого напрямку у просторі, що обумовлено відносним рухом формуючої системи й об'єкта зйомки. Для зазначених випадків певна частина частотних компонентів зображення $f(x, y)$ може бути відновлена шляхом застосування фільтра, частотна характеристика якого є оберненою до частотної характеристики $H(\omega_x, \omega_y)$ формуючої системи.

Як приклад, розглянемо модель просторових спотворень, що виникають під час відносного руху камери й об'єкта зйомки. Нехай затвор камери відкритий протягом часу T , а закон відносного руху

описується рівняннями: $x=a(t)$; $y=b(t)$, де x , y – просторові координати, t – час. Зображення $g(x,y)$, що буде зафіксовано камерою, отримується в результаті інтегрування миттєвих значень зображення $f(x,y)$ у часі, тобто

$$g(x, y) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x-a(t), y-b(t)) dt, \quad (3.10)$$

де межі інтегрування обрані симетричними для зручності подальших викладок. Виконуючи пряме двовимірне перетворення Фур'є від обох частин (3.10), отримуємо:

$$\begin{aligned} G(\omega_x, \omega_y) &= \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(x-a(t), y-b(t)) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dt dx dy = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x-a(t), y-b(t)) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy dt = \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x-a(t), y-b(t)) e^{-j(\omega_x [x-a(t)] + \omega_y [y-b(t)])} dx dy \right] e^{-j(\omega_x a(t) + \omega_y b(t))} dt = \\ &= F(\omega_x, \omega_y) \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega_x a(t) + \omega_y b(t))} dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

Таким чином, просторово-частотна характеристика спотворень, обумовлених відносним рухом камери й об'єкта зйомки, описується функцією:

$$H(\omega_x, \omega_y) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(\omega_x a(t) + \omega_y b(t))} dt.$$

Розглядаючи спеціальний випадок рівномірного руху камери щодо об'єкта зйомки в напрямку x зі швидкістю v , тобто коли $a(t)=vt$; $v=\text{const}$; $b(t)=0$, отримуємо, що

$$H(\omega_x, \omega_y) = T \frac{\sin(\omega_x v T / 2)}{\omega_x v T / 2} = T \text{sinc}(\omega_x v T / 2).$$

З останнього співвідношення видно, що чим вищою є швидкість

відносного руху і чим більшим є час експозиції (час відкриття затвора камери), тим більшими будуть спотворення, і тим важче буде вирішувати задачу відновлення через згущення нулів функції $\text{sinc}(\omega_x \nu T/2)$.

Таким чином, якість будь-якої системи формування зображень визначається, по-перше, її здатністю відтворювати без спотворень просторово-частотні компоненти вхідного зображення, і, по-друге, рівнем внесеного шуму.

3.2. Лінійні методи відновлення зображень

Можна припустити, що за умов відсутності шуму є можливим *абсолютно точно* відновлення будь-якого розмитого зображення. Але це не так. По-перше, у будь-якій практичній ситуації шум присутній завжди, і тому припущення про відсутність шуму є невірним. Якщо ж розглядати тільки теоретичну ситуацію, то поряд з позитивними прикладами можна навести негативні приклади, в яких для рішення задачі відновлення потрібно ділити на нульові значення просторово-частотної характеристики, а на нуль, як відомо, ділити не можна. Проте залучення певних спеціальних властивостей конкретних зображень *іноді* дозволяє обійти зазначені труднощі і теоретично вирішити задачу відновлення. Надалі обмежимося розглядом тільки певних лінійних методів відновлення зображень для випадку формування зображень лінійною просторово-інваріантною системою [1–5].

Відповідно до (3.5), практична можливість рішення задачі відновлення для випадку лінійної просторово-інваріантної системи формування зображень визначається тим, наскільки точно можна встановити поведінку її просторово-частотної характеристики, знання якої еквівалентно знанню ФРТ у просторовій області, а також тим, наскільки великим є шум. На практиці поведінку частотної залежності формуючої системи встановлюють за допомогою аналізу її відгуку на точкове джерело випромінювання або певними іншими методами [1;3;5].

Найбільш складною є проблема, що пов'язана з шумом. Так, спроба відновлення "зашумленого" зображення тільки з метою компенсації дії формуючої системи практично завжди призводить до

надмірного посилення шуму й повного руйнування результуючого зображення. Це обумовлено тим, що звичайно модуль просторово-частотної характеристики формуючої системи має тенденцію до спадання з ростом значень просторових частот. Тому в тих областях просторових частот, де модуль просторового спектра зображення є меншим, ніж модуль просторового спектра реалізації шуму, застосування компенсуючого фільтра, який здійснює тільки інверсію просторово-частотної характеристики системи формування, призведе до значного зростання шуму. Застосування такого чисто інверсного фільтра буде виправданим тільки для тих областей просторових частот, де модуль просторового спектра зображення *істотно* перевищує модуль просторового спектра реалізації шуму. Таким чином, при компенсації дії формуючої системи необхідно враховувати і статистичні властивості шуму, який є присутнім на зображенні. Так як просторовий шум на зображенні варто вважати випадковим процесом, то відповідний розрахунок компенсуючого фільтра може бути виконаний тільки в певному імовірнісному сенсі, наприклад, шляхом усереднення за ансамблем реалізацій. Варто враховувати, що підхід, заснований на усередненні за ансамблем реалізацій, буде гарантувати одержання гарних результатів тільки "у середньому статистичному" розумінні, але не для будь-якої випадково обраної реалізації.

При розгляді шуму традиційно виділяють такі види його моделей: адитивну, мультиплікативну, змішану адитивно-мультиплікативну і модель імпульсного шуму. Чисто мультиплікативна модель шуму може бути зведена до адитивної моделі шляхом застосування операції логарифмування даних; більш складною і мало вивченою є змішана модель, коли шум виявляється як адитивно, так і мультиплікативно. Особливістю імпульсного шуму є те, що такий шум заміщає (замінює) значення яскравості зображення, виявляючись у вигляді розрізненого набору точок зображення, яскравість яких істотно відрізняється від середньої яскравості сусідніх точок. Надалі будемо розглядати тільки адитивну модель шуму.

Адитивний шум просто додається до зображення у просторовій області і викликає спотворення напівтонів або кольору (для кольорових зображень). Для випадку, коли адитивний шум і зображення є випадковими некорельованими стаціонарними процесами, рішення

задачі відновлення напівтонових зображень статистичними методами призводить до результату, відомому як фільтр Вінера [2,5]:

$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \frac{\phi_n(\omega_x, \omega_y)}{\phi_s(\omega_x, \omega_y)}}, \quad (3.12)$$

де $W(\omega_x, \omega_y)$ – просторово-частотна характеристика фільтра Вінера, застосовуваного до спотвореного зображення $g(x,y)$ для одержання оцінки $f^\wedge(x,y)$ "справжнього" зображення $f(x,y)$; $H(\omega_x, \omega_y)$ – комплексна частотна характеристика формуючої системи; * – знак комплексного спряжиння; $\phi_n(\omega_x, \omega_y)$ і $\phi_s(\omega_x, \omega_y)$ – спектральні щільності потужності просторового шуму і "справжнього" зображення відповідно.

Аналіз співвідношення (3.12) показує таке. Якщо частка від ділення спектра потужності шуму на спектр потужності зображення на просторовій частоті (ω_x, ω_y) є нехтовно малою, тобто $\phi_n(\omega_x, \omega_y)/\phi_s(\omega_x, \omega_y) \approx 0$, то фільтр Вінера перетворюється в чисто інверсний фільтр. Якщо ж виконується зворотне, тобто $\phi_n(\omega_x, \omega_y)/\phi_s(\omega_x, \omega_y) \rightarrow \infty$, то $W(\omega_x, \omega_y) \rightarrow 0$ і, отже, дана просторово-частотна компонента буде відсутня у складі відновленого просторового спектра зображення. Якщо на просторовій частоті (ω_x, ω_y) спектр потужності шуму значно перевищує спектр потужності "справжнього" зображення, тобто $\phi_n(\omega_x, \omega_y) \gg \phi_s(\omega_x, \omega_y)$, то, застосовуючи розвинення в ряд за малим параметром, можна отримати, що фільтр Вінера в першому наближенні є узгодженим фільтром, бо $W(\omega_x, \omega_y) \approx kH^*(\omega_x, \omega_y)$, де k – певний коефіцієнт пропорційності.

Взагалі кажучи, фільтр Вінера не є оптимальним лінійним фільтром для обробки зображень. Це пов'язано з тим, що припущення про гауссівський закон розподілу значень яскравості зображення зазвичай не виконується [5].

Відомі різні види відновлювальних фільтрів, що мають багато спільного з фільтром Вінера; вони є або його частковим випадком, або використовують його як свою частину. Серед цих фільтрів зазначимо такі:

- інверсний фільтр [2]

$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H(\omega_x, \omega_y)}, \quad (3.13)$$

- псевдоінверсний фільтр

$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \alpha^2}, \quad (3.14)$$

- фільтр Тихонова [5], або параметричний фільтр обумовлених найменших квадратів Ханта [2]

$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \alpha^2 Q(\omega_x, \omega_y)}, \quad (3.15)$$

- параметричний фільтр Вінера [5]

$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \alpha^2 \frac{\phi_n(\omega_x, \omega_y)}{\phi_s(\omega_x, \omega_y)}}, \quad (3.16)$$

- фільтр Бекуса – Гільберта [5]

$$W(\omega_x, \omega_y) = \frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + (\lambda_1 / \lambda_2) \frac{\phi_n(\omega_x, \omega_y)}{\phi_s(\omega_x, \omega_y)}}, \quad (3.17)$$

- узагальнений фільтр Вінера [5], або фільтр Стокхема і Коула [2]

$$W(\omega_x, \omega_y) = \left[\frac{1}{H(\omega_x, \omega_y)} \right]^\gamma \left[\frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \alpha^2 \frac{\phi_n(\omega_x, \omega_y)}{\phi_s(\omega_x, \omega_y)}} \right]^{1-\gamma}, \quad (3.18)$$

- керуючий еволюційний фільтр [5]

$$W(\omega_x, \omega_y) = \left[\frac{1}{H(\omega_x, \omega_y)} \right]^\sigma \left[\frac{H^*(\omega_x, \omega_y)}{|H(\omega_x, \omega_y)|^2 + \alpha^2 Q(\omega_x, \omega_y)} \right]^\mu, \quad (3.19)$$

де α^2 , λ_1 , λ_2 , $0 \leq \gamma \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \sigma \leq 1$ – керуючі параметри, що мають цілком визначене значення для кожного з фільтрів, де вони використовуються.

Співвідношення (3.19) є найбільш загальною формою запису процесу лінійної фільтрації [5], з якої впливають усі інші. Наприклад, лінійний фільтр (3.18) впливає з (3.19), якщо покласти $\sigma = \gamma$, $\mu = 1 - \gamma$ і $Q(\omega_x, \omega_y) = \phi_n(\omega_x, \omega_y) / \phi_s(\omega_x, \omega_y)$.

Розглянуті фільтри не вичерпують усієї множини відомих лінійних і нелінійних фільтрів, застосовуваних для рішення задачі відновлення зображень.

Контрольні питання

1. Яка мета відновлення зображень?
2. Які задачі відносять до класу задач відновлення зображень?
3. Чи можна розглядати задачу підвищення контрасту зображення як задачу відновлення?
4. Що означають поняття "пряма задача" та "обернена задача"?
5. Чи можна визначити характеристики лінійної системи формування зображень за її реакцією на точкове джерело випромінювання?
6. Чи можна визначити характеристики нелінійної системи формування зображень за її реакцією на точкове джерело випромінювання?
7. Запишіть співвідношення, що описує процес формування зображення лінійною просторово-залежною системою.
8. Наведіть дискретний аналог формули (3.4). Яка розмірність векторів і матриці у цьому прикладі? Дослідіть властивість симетричності матриці.

9. Якщо система формування зображень має нескінченно високу роздільну здатність, то які за розміром об'єкти можна спостерігати?

10. Укажіть можливі причини просторового "розмиття" зображення. Чи можна цілком усунути просторове "розмиття" і відновити вхідне зображення?

11. У чому полягають основні труднощі рішення задачі відновлення просторово розмитих зображень?

12. Яке з зображень буде сильніше спотворено однією й тією самою лінійною просторово-незалежною системою формування зображень: круга радіусом 1 см чи круга радіусом 2 см; квадрата площею 1 см^2 чи квадрата площею 2 см^2 ; круга площею 1 см^2 чи квадрата площею 1 см^2 ?

13. Що означає поняття "система формування з ідеальним дифракційним обмеженням"?

14. Повторіть виведення формули для просторово-частотної характеристики спотворень, обумовлених відносним рухом, і розгляньте випадок рівномірного руху об'єкта зйомки під кутом 45 градусів до осі OX .

15. Укажіть розташування нулів просторово-частотної характеристики, яка описує спотворення, що обумовлені відносним рухом камери й об'єкта зйомки.

16. Чи є фільтр Вінера оптимальним для обробки видимих зображень?

17. За яких припущень щодо зображення і шуму фільтр Вінера є оптимальним?

18. У якому випадку фільтр Вінера переходить в інверсний фільтр? в узгоджений фільтр?

19. За якої умови параметричний фільтр (3.10) стає псевдоінверсним фільтром?

20. Дослідіть просторово-частотну характеристику узагальненого фільтра Вінера (3.13) для значення $\gamma=1/2$.

21. Дайте графічні ілюстрації співвідношенню (3.9) для різних значень параметра α^2 , вважаючи, що $H(\omega_x, \omega_y)$ – дійсна двовимірна функція, причому $H(0,0)=1$.

22. Дайте графічні ілюстрації співвідношенню (3.11) для різних значень параметра α^2 за умов фіксації відношення $\phi_n(\omega_x, \omega_y)/\phi_s(\omega_x, \omega_y)$, вважаючи, що $H(\omega_x, \omega_y)$ – дійсна двовимірна функція, причому $H(0,0)=1$.

23. Дайте графічні ілюстрації співвідношенню (3.13) для різних значень параметра α^2 при $\gamma=1/2$ і фіксованому відношенні $\phi_n(\omega_x, \omega_y)/\phi_s(\omega_x, \omega_y)$, вважаючи, що $H(\omega_x, \omega_y)$ – дійсна двовимірна функція, причому $H(0,0)=1$.

Лабораторна робота № 3

Тема: *Методи відновлення зображень*

Мета: Вивчення лінійних методів відновлення зображень

Завдання до лабораторної роботи. Лабораторна робота містить 2 завдання; кожне завдання має кілька варіантів. Для виконання лабораторної роботи необхідно виконати зазначений викладачем варіант завдання, представити короткий звіт і захистити отримані результати. Звіт оформляється друкованим чи рукописним способом і повинен містити *тільки результати* виконання завдання.

Завдання 1. Відновлення розмитих зображень.

1.1. Отримати у викладача графічний файл із "розмитим" цифровим зображенням певного друкованого тексту.

Вважати, що ефект "розмиття" зображення друкованого тексту обумовлений недосконалістю системи формування зображення і полягає у значному ослабленні верхніх просторових частот у спектрі вхідного зображення, де функція розсіювання точки системи формування зображень описується гауссівською залежністю виду:
 $\exp[-(\lambda x^2 + \mu y^2)]$.

1.2. Оцінити параметри λ і μ функції розсіювання точки, використовуючи зображення точкового джерела світла в лівому верхньому куті поданого зображення.

1.3. Застосувати інверсний (3.8), псевдоінверсний (3.9) та параметричний (3.10) фільтри до розмитого зображення, використовуючи для (3.9) та (3.10) різні значення параметра α^2 , а для (3.10) – не менш, ніж три різні за формою варіанти функції $Q(\omega_x, \omega_y)$ (їх вибір слід обґрунтувати). Для кожного випадку:

- суб'єктивно фіксувати якість відновлення напівтонового зображення;

Фрагмент MatLab-тексту програми для виконання завдання 1 наведено у додатку 3.1.

Завдання 2. Відновлення зображень, розмитих за рахунок відносного руху камери й об'єкта зйомки.

2.1. Отримати у викладача графічний файл із цифровим розмитим зображенням об'єкта, який рухався у просторі.

Вважати, що ефект "розмиття" зображення об'єкта обумовлений його рухом у той час, коли був відкритий затвор фотокамери. Вважати, що рух об'єкта в часі був рівномірним.

2.2. Відновити зображення об'єкта, підбираючи параметри функції розсіювання точки та використовуючи різні відновлювальні фільтри, й оцінити величину добутку швидкості руху об'єкта на тривалість часу експозиції. Навести обґрунтування використаного методу обробки, дати опис відповідного алгоритму і вказати значення основних параметрів обробки.

2.3. Дати словесний опис зображеного об'єкта.

Фрагмент MatLab-тексту програми для виконання завдання 2 наведено у додатку 3.2.

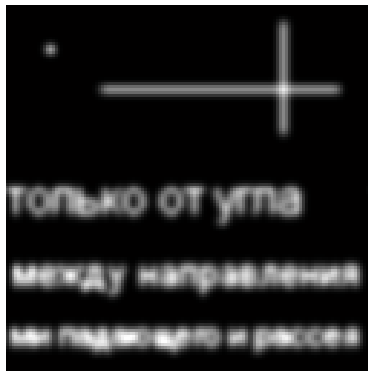
Література

1. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн. 1. – 312 с.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн. 2. – 480 с.
3. Venetsanopoulos A.N. Digital image processing and applications / Department of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, Canada, 1996. – 598 p.
4. Обработка изображений и цифровая фильтрация / под ред. Т.Хуанга.– М. : Мир, 1979. – 318 с.
5. Василенко Г.И. Восстановление изображений / Г.И. Василенко, А.М. Тараторин. – М. : Радио и связь, 1986. – 304 с.
6. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. – М. : Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 200 с.

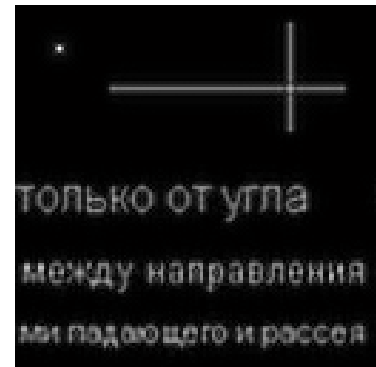
Додаток 3.1

Фрагмент MatLab-тексту програми для завдання 1.

```
%Lab3 ---> Image Restoration by Inverse and PseudoInverse Filtrations
clear all; close all;
image_bmp=imread(strcat('D:\Lab3\Lab3_BadImage\', 'lab3_08bad.bmp'));%read    bad    image
128x128 from file
%convert bad digital image from uint8 type to double type for the next processing
g=double(image_bmp);
%show bad (degradated) image for processing
figure(10);imshow(g,[0 255]);
%a posteriori evaluation of Point Spread Function (PSF) by image's point (it is in the top-left corner
on image)
for x=1:128, for y=1:128,
    h(x,y)=0;
    if (x<25)&(y<25), h(x,y)=g(x,y); end;
end; end;
%show PSF
figure(20),mesh(h);
%show spectra PSF
HF=fftshift(abs(fft2(h)));
HF=HF./max(max(HF));
figure(21),mesh(HF);
%Restoration by Inverse Filtration
%evaluate spectra of degradated image and shift it
GF=fftshift(fft2(g));
%do inverse filtration
FF_inv=GF./HF;
%show spectra after inverse filtration
figure(30),mesh(abs(FF_inv));
f_inv=real(ifft2(ifftshift(FF_inv)));
%show image after inverse filtration
figure(31);imshow(f_inv,[0 255]);%<----- this would be a very bad image
%Restoration by PseudoInverse Filtration
alpha2=0.1;%you can try to use this value, but you must find the best (optimal) value !!!
%evaluate spectra of degradated image and shift it
GF=fftshift(fft2(g));
%do PseudoInverse filtration
HF2=abs(HF'.*HF);
HFW=HF./(HF2+alpha2); %<---- PseudoInverse Filter
figure(40);mesh(abs(HFW));
FF_pseudoinv=GF.*HFW;
%show spectra after PseudoInverse filtration
figure(41),mesh(abs(FF_pseudoinv));
f_pseudoinv=abs(real(ifft2(ifftshift(FF_pseudoinv))));
%show image after PseudoInverse filtration
figure(42);imshow(f_pseudoinv,[0 255]);
figure(43);imshow(f_pseudoinv,[0 max(max(f_pseudoinv))]);
```



а)



б)

Рис. 3.1. Пример восстановления размытых изображений:
а) изображение до обработки; б) изображение после обработки

Додаток 3.2

Фрагмент MatLab-тексту програми для завдання 2.

```
%Lab3_2 ---> відновлення зображення, спотвореного відносним рухом
об'єкта та камери
close all;
clear all;
colormap(gray);
from= 'lab3_2_30bad.bmp';%ім'я файлу зі спотвореним зображенням

%Input Image from file
image_bmp=imread(strcat(from));%читаємо файл зі спотвореним зображенням
%convert image to double type for convenience of processing ...
f=double(image_bmp);
%show true image
figure(1);imshow(f,[0 255]);
%do image spectra and shift it to center for next processing
SF=fftshift(fft2(f));
%show true image spectra
figure(2),mesh(abs(SF));

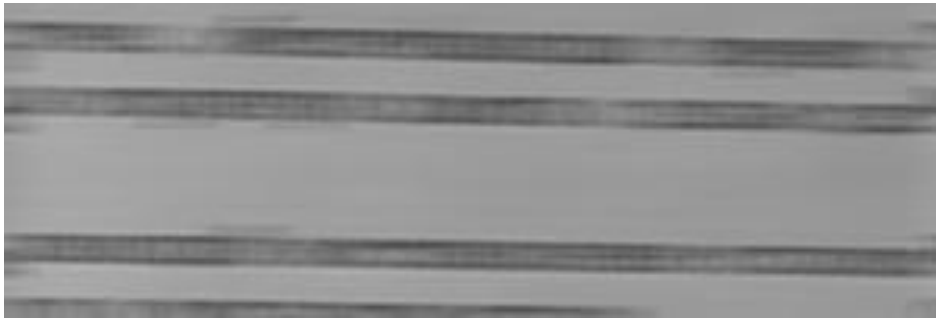
%будуємо функцію розсіювання точки
%Building of 2-D Impulse Response (Point Spread Function)
%for the next degradation
beta_x=0.100;%параметр зсуву <--- необхідно підібрати його значення
for x=1:100,
    for y=1:300,
        %    x1=(x-51)*beta_x;
        %    y1=(y-151)*beta_y;
        if (y1==0) HF(x,y)=1; else HF(x,y)=sin(y1)/y1; end;
    end;
end;
%show spectra PSF
figure(3),mesh(HF);
%show PSF with shift to center
h=real(ifft2(ifftshift(HF)));
figure(4),mesh(fftshift(h));

% будуємо псевдоінверсний фільтр
```

```

alpha2=0.001;%параметр псевдоінверсної фільтрації <--- необхідно підібрати
його значення
HF2=(abs(HF)).^2;
HFW=((HF').')./(HF2+alpha2); %<---- Pseudoinverse Filter
%застосовуємо псевдоінверсний фільтр
RSF=SF.*HFW;
% будуємо рішення
rsf=abs(iff2(iffshift(RSF)));
%відображаємо рішення "як воно є"
figure(9),imshow(rsf,[0 255]);
% відображаємо рішення з масштабуванням на його максимальне значення
max_value=max(max(rsf));
figure(10),imshow(rsf/max_value*255,[0 255]);

```



а)

точек, обеспечивающая перенос в
во вторичную память с целью сдел

ивающий восстановление согласов
ого в результате отказа

б)

Рис. 3.2. Приклад відновлення розмитих зображень:
а) зображення до обробки; б) зображення після обробки

РОЗДІЛ 4. МОРФОЛОГІЧНІ МЕТОДИ ОБРОБКИ БІНАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Методи математичної морфології були розроблені в середині 1960-х років Ж. Матероном і Ж. Серрой [1–3]. Вони призначені для одержання кількісних характеристик геометричної структури сигналів і зображень, а також ефективних способів рішення задач, пов'язаних із дослідженням форми, розмірів і взаємного розташування об'єктів. На даний час методи математичної морфології найбільш повно розроблені для випадку обробки бінарних зображень [1–11]; продовжується розробка методів морфологічної обробки напівтонових і кольорових зображень [12–14]; створюється теорія алгебри зображень [12] з метою узагальнення понять і методів математичної морфології і лінійної просторово-інваріантної фільтрації.

Морфологічні перетворення зображень являють собою важливий клас нелінійних локальних перетворень, в яких для кількісного опису досліджуваного зображення використовується набір певних еталонних міні-зображень, які називають структурними елементами. В основі усіх морфологічних перетворень лежать численні зсуви досліджуваного зображення відносно структурного елемента (або структурного елемента відносно зображення), які аналогічні зсувам, виконуваним при обчисленні двовимірної згортки [11]. Для випадку бінарних зображень основні операції математичної морфології – дилатація й ерозія – у точності збігаються з операціями вибору останньої і першої (тобто відповідно максимальної і мінімальної за значенням) порядкових статистик у класі нелінійних локальних фільтрів на порядкових статистиках [9]. Це означає, що для випадку бінарних зображень операції дилатації й ерозії можуть бути описані в термінах звичайної лінійної згортки. Для випадку напівтонових зображень також існує певна аналогія зі звичайною згортою, яка полягає в необхідності виконання зсувів, а відмінність полягає в тому, що для обчислення, наприклад, дилатації замість множення, яке застосовується у згортці, використовується підсумовування, а замість інтегрування (або підсумовування для дискретної згортки) – операція обчислення максимуму [12].

Реалізація алгоритмів морфологічних перетворень на ЕОМ має

певні труднощі, що обумовлені великою трудомісткістю обчислень і проблемами раціонального розміщення даних у пам'яті. Але морфологічні операції дозволяють глибоке розпаралелювання обчислень [8]. Це призвело до розробки і створення спеціалізованих обчислювальних засобів – морфологічних процесорів [7; 8].

У рамках математичної морфології зображення розглядаються як множини, що задані в певному векторному просторі. Це означає, що кожен елемент множини розглядається як вектор, координати якого задають місце розташування елемента зображення та його інші атрибути (інтенсивність, колір і т.д.). Наприклад, якщо на бінарних зображеннях "чорні" точки зображують об'єкти, то множина усіх "чорних" точок цілком описує таке зображення [11]. Таким чином, для опису бінарних зображень використовують множини, що задані у двовимірному дійсному векторному просторі R^2 , де кожен елемент множини є двовимірним вектором, координати якого є координатами "чорної" точки на зображенні. Аналогічно для опису цифрових бінарних зображень використовують двовимірний цілочисловий простір Z^2 [11], де кожен елемент множини є двовимірним вектором із цілочисловими координатами "чорного" пікселя зображення. Чорно-білі напівтонові цифрові зображення розглядаються як множини з компонентами у просторі Z^3 . У цьому випадку дві компоненти кожного елемента множини вказують на координати пікселя, а третя компонента – на його дискретне значення інтенсивності. Для опису кольорових зображень використовують простори більшої розмірності.

4.1. Основні поняття й операції математичної морфології

4.1.1. Загальні відомості

Математична морфологія заснована на теорії множин, що задані в певному векторному просторі; зазвичай множини розглядаються в n -вимірному евклідовому векторному просторі E^n [1; 11]. При цьому кожен елемент множини розглядається як точка або вектор, координати яких відповідають значенням атрибутів досліджуваного об'єкта. Наприклад, при вивченні зображень у якості атрибутів використовують їх декартові координати, інтенсивність, колір і т.д. Для бінарного

випадку зображення розглядається як множина, що задана у двовимірному векторному евклідовому просторі, елементами якої є пари значень декартових координат, що відповідають, наприклад, "чорним" точкам зображення.

Основною операцією математичної морфології є операції *додавання множин за Мінковським* [1]. На основі цієї операції, а також традиційних операцій об'єднання, перерізу, доповнення, відбиття та зсуву множин у векторному просторі можуть бути визначені інші операції математичної морфології, а саме операція *віднімання множин за Мінковським*, операції *дилатації* (англ. dilation) і *ерозії* (erosion), *порівняння* (hit or miss), *заповнення* (opening) і *поповнення* (closing) [1], *стоншення* (thinning) і *стовщення* (thickening) [11], *гранулометрії* (granulometry) [1], побудови *скелетонів* (skeleton), *опуклих оболонок* (convex hull), *пекстра* (pecstrum) [10], *морфологічних градієнтів* [11] і т.д. Зазначені операції дозволяють розробляти різноманітні морфологічні алгоритми обробки сигналів і зображень [11; 12].

Вивчення форми об'єкта і його структури означає встановлення певної сукупності відношень між його елементами або окремими частинами. Інструментом для такого вивчення в математичній морфології слугує *структурний елемент* (SE – structuring element). Він являє собою певну еталонну множину, яка задана в тому самому просторі, що і досліджувана множина, і який має можливість пересуватися у цьому просторі. За допомогою структурного елемента реалізується те або інше морфологічне перетворення досліджуваної множини і він відіграє "роль зонда для збору інформації" [1]. Оскільки структура будь-якої множини A визначається сукупністю відношень між її елементами або її підмножинами, то найпростішими відношеннями, які можуть дати інформацію про її структуру, є відношення включення й перерізу певного структурного елемента B і множини A , тобто $B \subset A$ (множина B є підмножиною множини A) і $B \cap A \neq \emptyset$ (множина B перерізається з множиною A). На підставі даних відношень за допомогою операцій "і", "або", "ні" можуть бути виведені інші відношення, сімейство яких утворює σ -алгебру \mathfrak{R} [1]. Взагалі структуру множини A можна вважати відомою, якщо для будь-якого можливого відношення $R \in \mathfrak{R}$ відомо, має воно місце для множини A чи ні.

Поняття структурного елемента є одним із основних понять

математичної морфології. У загальному випадку на структурний елемент B не накладається будь-яких спеціальних обмежень (наприклад, множина B не зобов'язана бути непорожньою, опуклою або зв'язною множиною). Але оскільки простір E^n має векторну структуру, то для множини B обов'язково вводиться поняття *початку* (origin), що визначає початок системи координат у просторі E^n , де розглядається множина B . В якості структурного елемента часто використовують круг (на площині) або кулю (у просторах більшої розмірності); для обробки цифрових зображень залежно від геометричного растра й інших умов задачі застосовують структурні елементи різноманітної форми й розмірів (рис. 4.1) [7; 10–12; 14].

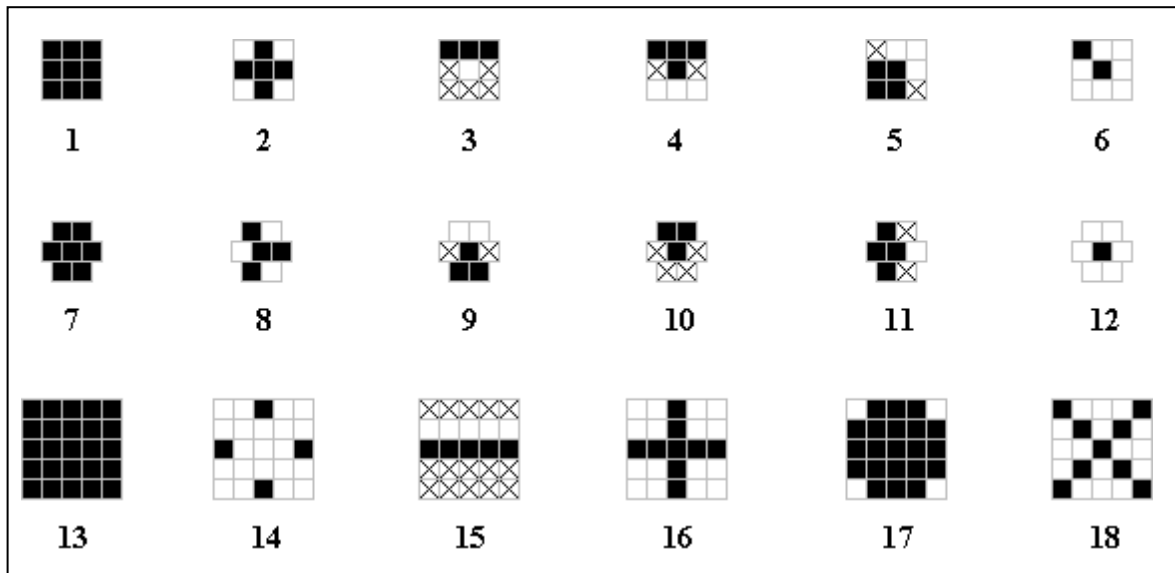


Рис. 4.1. Приклади структурних елементів для обробки бінарних цифрових зображень

Структурні елементи з номерами 1–6 та 13–18 мають розмір 3x3 та 5x5 пікселів відповідно і застосовуються для прямокутного растра зображення, а структурні елементи з номерами 7–12 – для гексагонального растра (це 6 із 14 прикладів так званих "околов Голея"). Для наведених прикладів *початок* кожного структурного елемента збігається з його центральним елементом, причому набір пікселів чорного кольору позначає *аналізовану форму* об'єкта на зображенні, набір пікселів білого кольору позначає *окіл аналізованої форми* об'єкта на зображенні, що повинний обов'язково враховуватися, а набір

пікселів, позначених значком "x" (або білих пікселів, якщо значок "x" на структурному елементі є відсутнім), задає *форму, яка ігнорується*. Останнє означає, що ці пікселі не повинні впливати на результат морфологічної операції.

4.1.2. Операції над множинами в евклідовому просторі

4.1.2.1. Основні визначення

Різні множини точок (векторів) евклідового простору E^n є підмножинами множини E^n . Надамо спеціальні позначення двом з них: \emptyset – *порожня* (нульова) множина, яка не містить ні однієї точки з E^n ; E – *уся* множина точок E^n , або *універсальна* (повна) множина.

Позначимо $P(E)$ множину усіх підмножин множини E^n ; множина $P(E)$ є простором [1], тому що між її елементами (множинами) можуть бути встановлені традиційні відношення включення, об'єднання, перерізу, доповнення і т.д.

Позначимо $\{x\}$ одиничну (одноеlementну) множину простору E^n , яка складається з одного елемента – n -вимірного вектора з координатами (x_1, \dots, x_n) . Тоді запис $\{0\}$ означає, що множина $\{0\}$ містить тільки вектор нульової довжини, тобто вектор із координатами $(0, \dots, 0)$ (не слід сплутувати множини $\{0\}$ та \emptyset).

Нехай A і B – певні множини точок (векторів) евклідового простору E^n . Додатково до традиційних операцій об'єднання $A \cup B$, перерізу $A \cap B$ й різниці $A - B$ множин A та B , а також доповнення A^c множини A , розглянемо нові операції [1] над множинами в евклідовому просторі.

Зсув (translation) множини A на вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ позначається A_x і визначається формулою

$$A_x = \{ y / y = a + x, \quad a \in A \} . \quad (4.1)$$

Множини \emptyset та E є єдиними елементами простору $P(E)$, які інваріантні до операції зсуву [1]. Операція доповнення множини інваріантна до зсуву: $(A_x)^c = (A^c)_x$.

Відбиття (reflection) множини B позначається \hat{B} або $(-B)$, визначається формулою

$$\hat{B} = \{ x \mid x = -b, b \in B \} \quad (4.2)$$

і задає множину, яка симетрична первісній множині B щодо початку системи координат. Операція відбиття збігається зі своєю оберненою операцією: $(\hat{B})^\wedge = B$. Зазначимо, що у загальному випадку при ненульовому зсуві $(B_x)^\wedge \neq (\hat{B})_x$. Якщо ж множина B є симетричною щодо початку, то $B = \hat{B}$.

На рис. 4.2 наведено ілюстрації до операцій зсуву і відбиття множин.

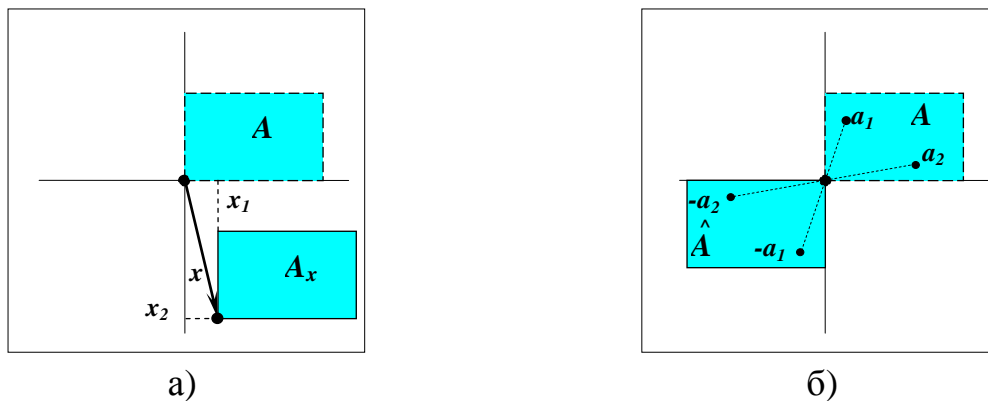


Рис. 4.2. Зсув та відбиття множин у векторному просторі E^2 :
а) зсув множини A на вектор $x=(x_1, x_2)$; б) відбиття (симетрія) множини A

4.1.2.2. Додавання множин за Мінковським

Операція додавання множин за Мінковським \oplus визначається в просторі $P(E)$ формулою [1]

$$A \oplus B = \{ a+b \mid a \in A, b \in B \} \quad (4.3)$$

і задає множину, елементами якої є різні суми елементів множин A і B ; результат (4.3) називають також сумою множин A і B (рис. 4.3).

За визначенням вважають [1], що $A \oplus \emptyset = \emptyset$. Операція (4.3) комутативна: $A \oplus B = B \oplus A$ та асоціативна: $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$. З (4.3) випливають такі співвідношення: $A \oplus \{x\} = A_x$ (зсув множини A на вектор x), $A \oplus \{0\} = A$. Окрім того, вважаємо, що $A \oplus E = E$. З (4.3) також випливає, що в загальному випадку $A \not\subset (A \oplus B)$ та $B \not\subset (A \oplus B)$. Але: 1) якщо $\{0\} \subset B$, то $A \subset (A \oplus B)$; 2) якщо $\{0\} \subset A$, то $B \subset (A \oplus B)$; 3) якщо $\{0\} \subset A$ та $\{0\} \subset B$, то $A \subset (A \oplus B)$ та $B \subset (A \oplus B)$.

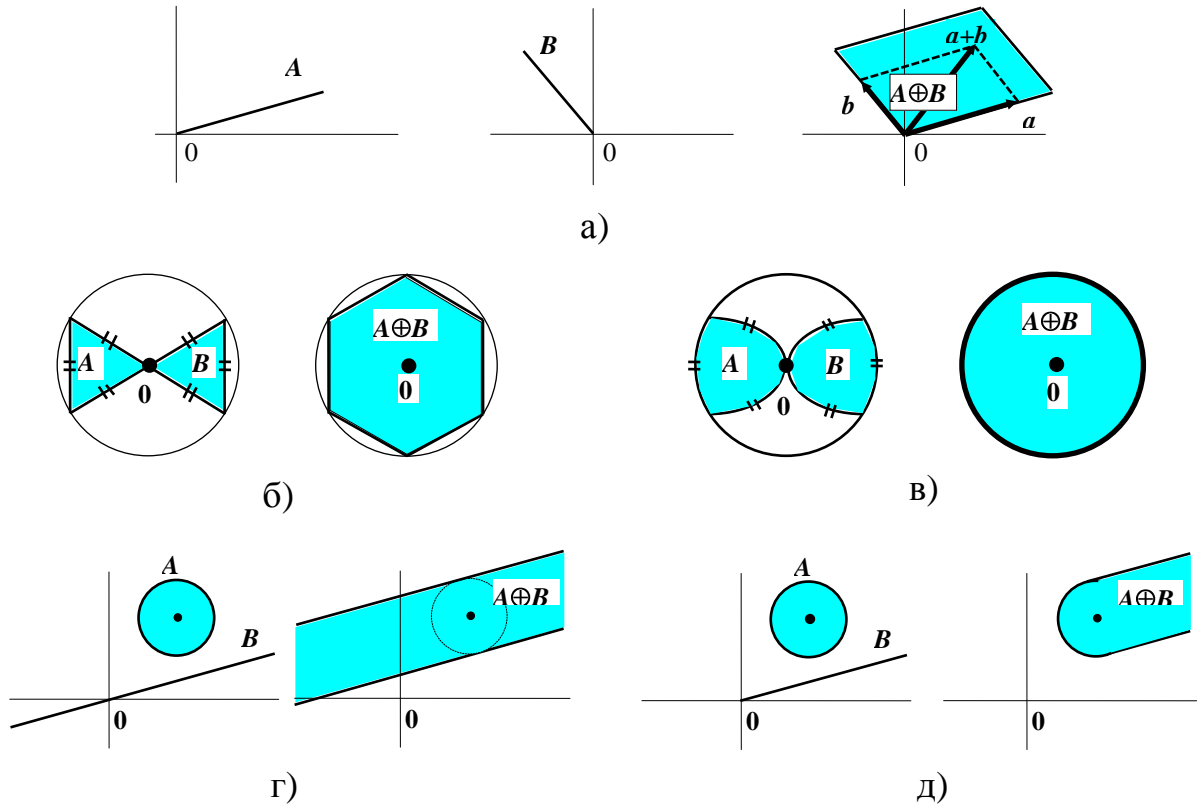


Рис. 4.3. Ілюстрації до операції додавання множин за Мінковським:

а) сума двох відрізків є паралелограм; б) сума двох трикутників є шестикутник; в) сума двох “криволінійних трикутників” (так званих трикутників Релло) є круг; г) сума круга і прямої є смуга; д) сума круга і променя є напівсмуга

Формула (4.3) може бути записана також у вигляді

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in A} B_y = \bigcup_{x \in B} A_x = \{z / (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}. \quad (4.4)$$

Дійсно, із (4.3) з урахуванням комутативності операції додавання

за Мінковським безпосередньо впливають перші два співвідношення в (4.4). Менш очевидним є третє співвідношення $A \oplus B = \{z / (\hat{B})_z \cap A \neq \emptyset\}$, згідно з яким сума множин за Мінковським є множина векторів z таких, що переріз множини A і зсуву на вектор z відбиття структурного елемента B не є порожньою множиною. Виведення даного співвідношення таке. Відповідно до (4.3), сума за Мінковським множин A і B є множина $A \oplus B = \{a+b / a \in A, b \in B\}$, елементи якої $z=a+b$ є сумою векторів a і b . Звідси випливає, що $b=z+(-a)$. Тоді $A \oplus B = \{z / a \in A, z+(-a) \in B\} = \{z / a \in A, a \in (-B) \oplus \{z\}\} = \{z / a \in A, a \in (\hat{B})_z\}$. Останнє співвідношення означає, що множина $A \oplus B$ складається з таких елементів z , для яких множини A і $(\hat{B})_z$ мають непорожній переріз, тобто $A \oplus B = \{z / A \cap (\hat{B})_z \neq \emptyset\}$. Оскільки елементи $a \in A$, то крім наведеної форми можлива й інша еквівалентна їй форма запису зазначеного співвідношення [11]: $A \oplus B = \{z / [A \cap (\hat{B})_z] \subseteq A\}$.

4.1.2.3. Дилатація множини

Дилатація (розширення) множини A множиною B визначається [1] в $P(E)$ як множина точок (векторів) z таких, що множина B_z має непорожній переріз з множиною A . Формула визначення дилатації множини A множиною B є

$$A \oplus \hat{B} = \bigcup_{x \in B} A_{-x} = \{z / B_z \cap A \neq \emptyset\}. \quad (4.5)$$

З (4.5) випливає, що операція дилатації є композицією операцій відбиття та додавання множин за Мінковським. Але, на відміну від операції додавання за Мінковським, реалізація дилатації через операцію перерізу множин виконується без застосування до множини B операції відбиття (рис. 4.4).

Дилатація не є комутативною та не є асоціативною операцією, тобто $A \oplus \hat{B} \neq B \oplus \hat{A}$ та $(A \oplus \hat{B}) \oplus \hat{C} \neq A \oplus (B \oplus \hat{C})$. Але можна вважати, що вона є “антикомутативною” операцією в тому значенні, що $A \oplus \hat{B} = (B \oplus \hat{A})$. Зазначимо також, що $(A \oplus \hat{B}) \oplus \hat{C} = A \oplus (B \oplus \hat{C})$ та $(A \oplus \hat{B}) \oplus \hat{C} = A \oplus (B \oplus \hat{C})$.

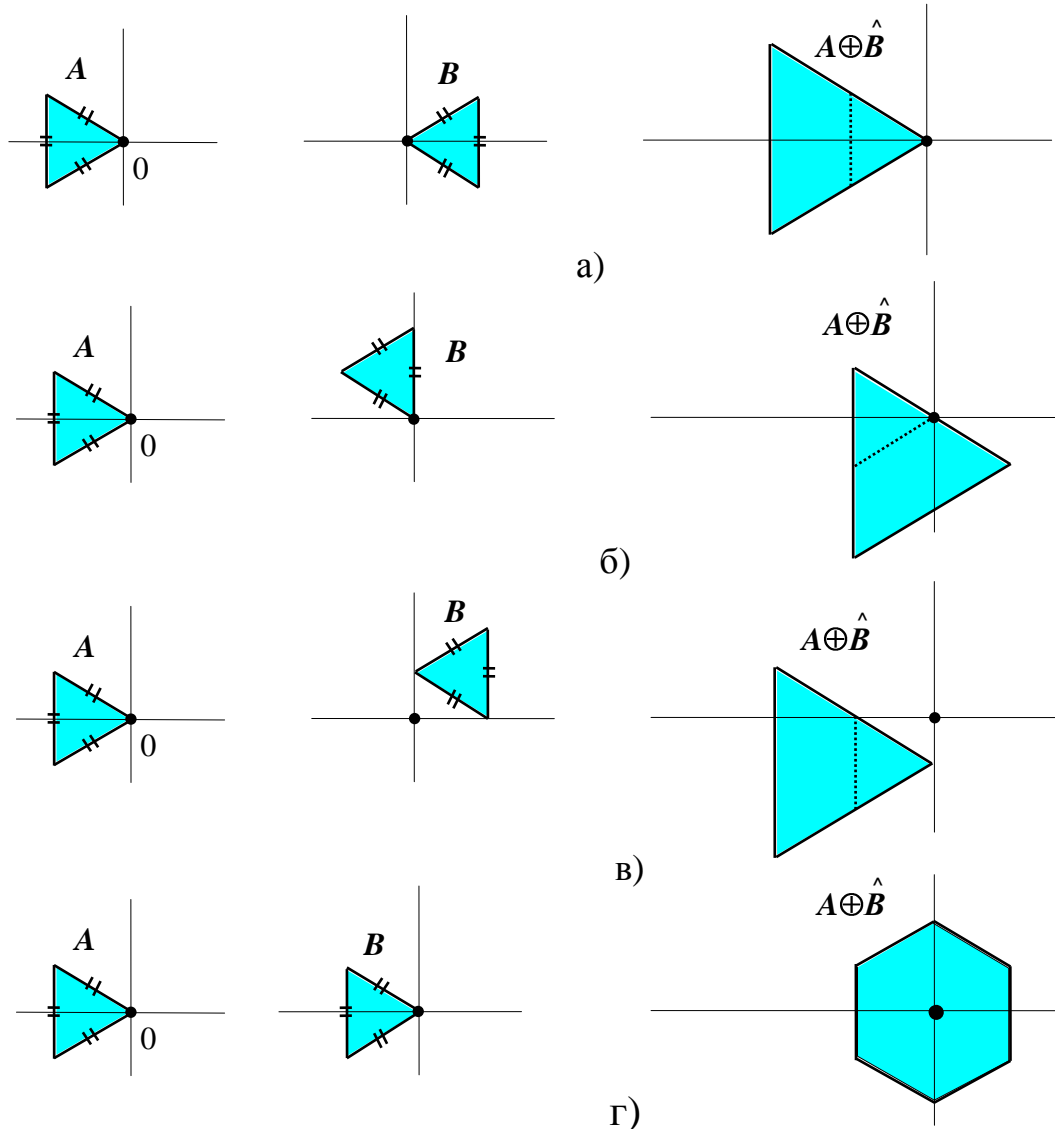


Рис. 4.4. Дилатація множини:

а) результат дилатації трикутної множини трикутним структурним елементом; б), в) результат дилатації зсувається при зсуві структурного елемента щодо початку системи координат; г) дилатація за допомогою структурного елемента, що є “дзеркальною” копією наведеного вище елемента

Очевидно, якщо множина B є симетричною щодо *початку*, то результат додавання за Мінковським $A \oplus B$ буде збігатися з результатом дилатації $A \oplus \hat{B}$. З цього приводу слід зауважити, що в ряді робіт [10–14] визначення дилатації ототожнюють із додаванням за Мінковським, тобто формально записують дилатацію у вигляді (4.4), а не у вигляді (4.5). З погляду на історію питання, таке перевизначення не

є обґрунтованим. Але у випадку застосування симетричного структурного елемента результат дилатації буде збігатися з результатом додавання за Мінковським.

Приклад. Нехай множина A містить тільки один елемент, наприклад $A=\{(1,1)\}$. Нехай множина B містить два елементи, наприклад $B=\{(0,0), (1,0)\}$. Тоді $\hat{B}=\{(-1,0), (0,0)\}$, тобто множина B не є симетричною щодо початку. Відповідно до (4.3), множина $A\oplus B$ повинна містити тільки елементи $(1,1)$ і $(2,1)$. Виконуючи різноманітні зсуви множини \hat{B} , можна одержати, що нерівність $(\hat{B})_x \cap A \neq \emptyset$, що є визначальною для операції додавання множин за Мінковським, задовольняється для зазначених елементів $x=(1,1)$ і $x=(2,1)$. Нерівність $B_x \cap A \neq \emptyset$, що є визначальною для операції дилатації множин, задовольняється для інших елементів $x=(0,1)$ і $x=(1,1)$. Для кращого розуміння поданого прикладу рекомендується виконати його графічну ілюстрацію.

4.1.2.4. Віднімання множин за Мінковським

Операція віднімання множин за Мінковським \ominus визначається у просторі $P(E)$ формулою [1]

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c \quad (4.6)$$

і є двоїстою операцією щодо операції додавання множин за Мінковським.

Двоїстість операції віднімання полягає в тому, що віднімання для множини A утворюється за допомогою виконання операції додавання для його доповнення A^c із наступним узяттям доповнення від отриманого результату. Відповідно до (4.4), віднімання за Мінковським є:

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c = \bigcap_{x \in B} A_x = \{z \mid (\hat{B})_z \subset A\}. \quad (4.7)$$

Розглянемо виведення формули (4.7). Застосовуючи відому тотожність де-Моргана $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$, одержуємо перше

співвідношення $(A^c \oplus B)^c = (\bigcup_{x \in B} (A_x)^c)^c = \bigcap_{x \in B} A_x$. Далі, якщо переріз $\bigcap_{x \in B} A_x$ не є порожньою множиною, то це означає, що частина елементів множин A_x повинна належати певній підмножині, що є в кожній з множин A_x для усіх векторів зсуву $x \in B$. Формально можна записати: $\bigcap_{x \in B} A_x = \bigcap_{x \in B} \{a+x \mid a \in A\} = \bigcap_{x \in B} \{z \mid z+(-x) \in A\} = \bigcap_{x \in (-B)} \{z \mid z+x \in A\}$.

З останнього запису випливає, що усі елементи $z+x$, які складають множину $(\hat{B})_z$, повинні належати множині A , тобто $(\hat{B})_z \subset A$. Тому множина $A \setminus B$ складається з усіх тих і тільки тих елементів z , для яких множина $(\hat{B})_z$ є підмножиною множини A , тобто $A \setminus B = \{z \mid (\hat{B})_z \subset A\}$.

Розглянемо множину елементів z таку, що $(\hat{B})_z \subset A$. Якщо множина $(\hat{B})_z$ є підмножиною множини A , то множина $(\hat{B})_z \cap A^c$ є порожньою. Це означає, що $\{z \mid (\hat{B})_z \subset A\} = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A^c = \emptyset\}$.

З іншого боку, доповнення до множини з елементів z , які задовільняють $(\hat{B})_z \cap A^c = \emptyset$, є множина елементів z така, що

$$(\hat{B})_z \cap A^c \neq \emptyset, \text{ тобто } \{z \mid (\hat{B})_z \cap A^c = \emptyset\}^c = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A^c \neq \emptyset\}.$$

Але це означає, що $\{z \mid (\hat{B})_z \cap A^c = \emptyset\} = \{z \mid (\hat{B})_z \cap A^c \neq \emptyset\}^c$. Остання множина за визначенням є $(A^c \oplus B)^c$. Таким чином, виведення формули (4.7) закінчено.

Відповідно до (4.6), будемо вважати, що $A \setminus \emptyset = E$, де E – універсальна множина, тобто множина усіх точок простору E^n . Окрім того, будемо вважати, що $A \setminus E = \emptyset$.

Операція віднімання множин за Мінковським не є комутативною та не є асоціативною операцією.

4.1.2.5. Ерозія множини

Операція, двоїста до операції дилатації, називається *ерозією* (*стиском*). Ерозія множини A множиною $B \neq \emptyset$ визначається як множина точок (векторів) x таких, для яких множина B_x є підмножиною множини A [1]. Враховуючи (4.7), ерозія множини A множиною B є

$$A \setminus \hat{B} = (A^c \oplus \hat{B})^c = \bigcap_{x \in B} A_{-x} = \{z \mid B_z \subset A\}. \quad (4.8)$$

З (4.8) випливає, що операція ерозії є композицією операцій відбиття та віднімання множин за Мінковським. Операція ерозії не є комутативною та не є асоціативною.

З (4.8) випливає, що ерозія порожньої множини є порожня множина. Крім того, якщо $A \neq \emptyset$, але при будь-яких зсувах z ніколи не виконується відношення *включення* $B_z \subset A$, то ерозія множини A множиною B також є порожня множина \emptyset . Цей результат має винятково важливе практичне значення, тому що він означає *поглинання* в результаті виконання ерозії такої множини A , яка цілком не вміщує усі елементи множини B при різних зсувах останньої. Таким чином, існує можливість раціонального підходу до фільтрації імпульсних перешкод на бінарних зображеннях за допомогою вибору відповідного за формою і розмірами структурного елемента.

На відміну від операції віднімання множин за Мінковським, реалізація операції ерозії через операцію *включення* або через операцію *перерізу* множин не потребує використання операції *відбиття* множини B . Очевидно, якщо множина B є симетричною відносно початку системи координат, то результат ерозії $A \circ B$ буде збігатися з результатом віднімання за Мінковським $A \ominus B$.

На рис. 4.5 наведено приклади, які ілюструють основні властивості операцій дилатації й ерозії множин для випадку евклідового простору E^2 . Зазначимо, що ерозія множини за допомогою різних структурних елементів може давати як однаковий (рис. 4.5, д, е), так і різний результат (рис. 4.5, ж, з).

Операції дилатації й ерозії є двоїстими, але не є взаємно оберненими. Тому одержання множини, яка збігається з початковою множиною після почергового застосування до неї операції дилатації, а потім – ерозії (або операції ерозії, а потім операції дилатації), варто розглядати як виняток із правил, а не як правило.

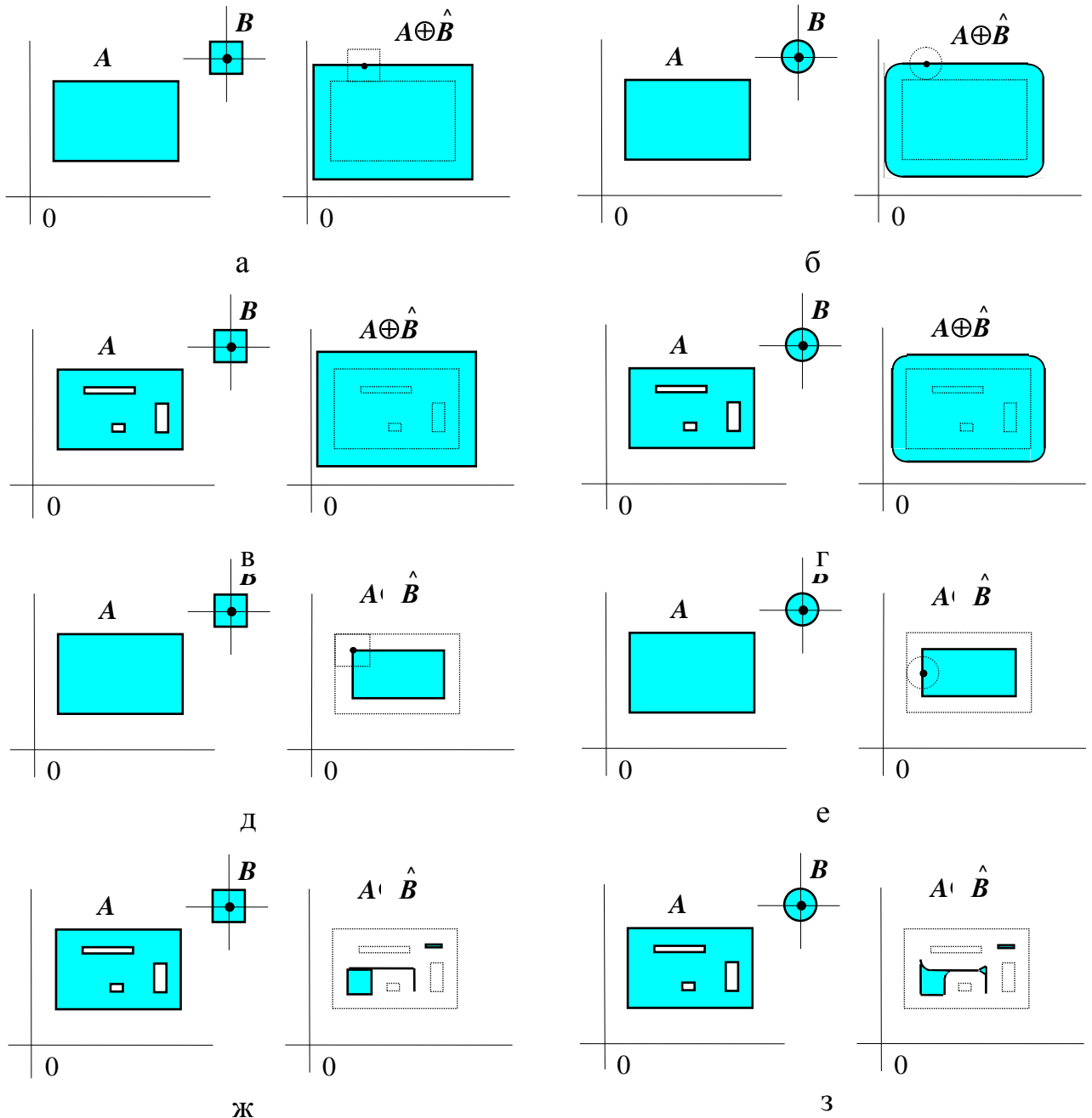


Рис. 4.5. Порівняння дилатації й ерозії множин:

а)–г) дилатація множини призводить до її “розширення” залежно від форми і розмірів структурного елемента і може усувати “дірки” у множині; д)–з) ерозія множини призводить до її “стиску” і збільшує “дірки” у множині

4.1.2.6. Заповнення і поповнення множин

Комбінування операцій ерозії і додавання множин за Мінковським, дилатації і віднімання множин за Мінковським

призводить до побудови ще двох важливих морфологічних операцій, які називають відповідно операціями *заповнення* (opening) і *поповнення* (closing).

Заповнення множини A множиною B визначається формулою

$$A \circ B = (A \setminus \hat{B}) \oplus B = \cup \{ B_z / z \in E ; B_z \subset A \} . \quad (4.9)$$

Відповідно до (4.9), *заповнення* множини A множиною B являє собою об'єднання усіх тих множин B_z , що утворюються при зсувах множини B на різні вектори $z \in E$ і які при цьому є підмножинами множини A . Таким чином, результатом *заповнення* множини A множиною B буде певна підмножина (можливо, навіть порожня) множини A . Наведемо виведення другого співвідношення у формулі (4.9) з [1]: оскільки співвідношення $x \in (A \setminus \hat{B}) \oplus B$ рівносильно $(\hat{B})_x \cap (A \setminus \hat{B}) \neq \emptyset$, то це рівносильно тому, що існує точка $z \in E$, для якої $B_z \subset A$ і $x \in B_z$.

Для операції *заповнення* виконуються такі важливі властивості:

- 1) антиекстенсивність, тобто $(A \circ B) \subseteq A$;
- 2) монотонність, тобто якщо $C \subset D$, то $(C \circ B) \subset (D \circ B)$;
- 3) ідемпотентність, тобто $(A \circ B) \circ B = A \circ B$.

Ці властивості означають, що при застосуванні операції *заповнення*: 1) результат буде підмножиною початкової множини; 2) монотонність буде збережена; 3) застосування більше ніж однієї операції *заповнення* ніяк не позначиться на кінцевому результаті.

Говорять, що множина A *заповнена* множиною B , якщо $A \circ B = A$.

Вважають, що множина A *може бути заповнена* множиною B , якщо існує така множина C , що $A = C \oplus B$. Якщо множина A не може бути *заповнена* множиною B , то результатом *заповнення* $A \circ B$ є порожня множина.

Приклад. Якщо вихідна множина A є прямокутник, а множина B – квадрат, то результатом *заповнення* A множиною B буде той самий прямокутник A ; якщо ж множина B – круг, то результатом *заповнення* буде прямокутник з округленими кутами.

Поповнення множини A множиною B визначається формулою

$$A \bullet B = (A \oplus \hat{B}) \subset B . \quad (4.10)$$

З (4.10) видно, що *поповнення* множини A множиною B є дилатація множини A множиною B із наступним застосуванням операції віднімання за Мінковським. Таким чином, *поповнення* є множина точок z таких, для яких зсув B_z є підмножиною множини $A \oplus \hat{B}$, тобто множини A , яка розширена дилатацією. Інше визначення поповнення пов'язане з тим, що операції заповнення і поповнення є двоїстими операціями, тобто виконуються рівності:

$$A \circ B = (A^c \bullet B)^c ; \quad A \bullet B = (A^c \circ B)^c . \quad (4.11)$$

Таким чином, *поповнення* можна одержати шляхом *заповнення* доповнення множини з наступним узяттям доповнення від отриманого результату.

Операція поповнення є:

- 1) екстенсивною, тобто $A \subseteq (A \bullet B)$;
- 2) монотонною, тобто якщо $C \subset D$, то $(C \bullet B) \subset (D \bullet B)$;
- 3) ідемпотентною, тобто $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$.

Говорять, що множина A *поповнена* множиною B , якщо $A \bullet B = A$.

Вважають [1], що множина A *може бути поповнена* множиною B , якщо існує така множина C , що $A = C \subset B$.

Приклад. Якщо вихідна множина A є прямокутник, а множина B – квадрат або круг, то результатом поповнення множини A множиною B буде той самий прямокутник A .

Слід зазначити, що операції заповнення і поповнення не є взаємно оберненими, тобто в загальному випадку $A \neq (A \bullet B) \circ B$ і $A \neq (A \circ B) \bullet B$.

Якщо A і B – опуклі множини, то заповнення $A \circ B$ і поповнення $A \bullet B$ також є опуклими множинами. Якщо B – зв'язна множина, а множина $A = \bigcup_{i \in I} C_i$ є об'єднанням своїх зв'язних компонентів, то $A \circ B = \bigcup_{i \in I} (C_i \circ B)$.

Практичне застосування операцій заповнення і поповнення пов'язане з тим, що вони забезпечують ефективне сглажування границь на бінарному зображенні. Так, якщо границя бінарного зображення спотворена і має “виступи” назовні, то в цьому випадку застосування операції заповнення може забезпечити видалення цих “виступів”; якщо ж є внутрішні “виступи”, то в цьому випадку для їх видалення варто застосувати операцію поповнення. Крім цього, операції заповнення і поповнення можуть забезпечити ефективну фільтрацію імпульсних перешкод на зображенні, і тому на їх основі часто розробляють різноманітні морфологічні фільтри [11].

4.1.2.7. Операція порівняння множини

Порівняння (hit-or-miss transform) є однією з важливих морфологічних операцій, які використовуються для рішення задач виявлення об'єкта або частини об'єкта заданої форми на зображенні. Дана операція була введена Серрою як узагальнення операції ерозії; вона позначається символом \otimes і визначається співвідношенням

$$A \otimes B = A \otimes (B^1, B^2) = \{z / B_z^1 \subset A; B_z^2 \subset A^c\}, \quad (4.12)$$

де $B = (B^1, B^2)$ – сполучена пара структурних елементів, що одночасно перевіряються на включення у множину A (структурний елемент B^1) і на включення у множину A^c (структурний елемент B^2); у закордонній літературі дані елементи називають “hit” та “miss” – елементами, які задають аналізовану форму й окіл аналізованої форми відповідно. Таким чином, співвідношення (4.12) забезпечує можливість виділення елементів множини з урахуванням її околу.

Очевидно, якщо $B^2 = \emptyset$, то ми маємо *ерозію*. У загальному випадку відповідно до (4.12) справедливою буде формула

$$A \otimes B = (A \hat{\cap} B^1) \cap (A^c \hat{\cap} B^2), \quad (4.13)$$

яка встановлює, що *порівняння* обчислюється як переріз двох ерозій: ерозії множини A множиною B^1 і ерозії доповнення A^c множиною B^2 .

Використовуючи (4.8) і (4.4), формула (4.13) може бути записана також у вигляді

$$A \otimes B = (A \setminus \hat{B}^1) \cap (A \oplus \hat{B}^2)^c = (A \setminus \hat{B}^1) - (A \oplus \hat{B}^2) , \quad (4.14)$$

тобто *порівняння* множини A зі структурним елементом B може бути отримано і шляхом віднімання результату дилатації множини miss -елементом із результату його ерозії hit -елементом.

З узагальненням поняття "*структурний елемент*" пов'язане й узагальнення операції *заповнення* множини, що визначається співвідношенням [13]

$$A \circ (B^1, B^2) = [A \otimes (B^1, B^2)] \oplus B^1 . \quad (4.15)$$

Аналогічно може бути виконане узагальнення операції *поповнення* множини [13].

4.1.2.8. Операція підстановки множини

Операцію *підстановки* множини (*символьної підстановки* [15]) визначимо формулою

$$A \Leftrightarrow (B_1; B_2) = (A \setminus \hat{B}_1) \oplus B_2 ; \quad B_1 \neq B_2 \neq \emptyset , \quad (4.16)$$

де A – первісна множина; B_1 і B_2 – структурні елементи, що задають множини для пошуку та заміни відповідно. Відповідно до (4.16), *підстановка* множини виконується шляхом ерозії множини A множиною B_1 із наступним "розширенням" отриманої множини множиною B_2 .

Якщо $B_1 = B_2$, то операція *підстановки* множини переходить в операцію *заповнення* множин (4.9).

Узагальнення операції *підстановки* множин може бути отримане при розгляді структурного елемента B_1 як узагальненого структурного елемента $B_1 = (B^1_1, B^2_1)$ і заміні в (4.16) операції *ерозії* операцією *порівняння*.

Операція *підстановки* множини може бути використана для *маркування* об'єктів або частин об'єктів на зображенні; при цьому структурний елемент B_1 задає шукану форму об'єкта, а структурний елемент B_2 відіграє роль маркера.

4.2. Алгоритми обробки бінарних зображень

4.2.1. Алгоритм дилатації

Обчислення дилатації бінарного зображення потребує виконання зсувів структурного елемента щодо зображення і виконання операції взяття перерізу. Для реалізації зсувів існує два варіанти: 1) структурний елемент B зсувається стосовно зображення A ; 2) зображення A зсувається стосовно структурного елемента B . Зазвичай другий варіант є кращим для цифрової реалізації [8; 12]; для виконання операції перерізу застосовується поелементна логічна операція “і”. Нижче наведено фрагмент Pascal-програми, в якому реалізовано даний підхід до побудови алгоритму дилатації.

```
uses crt,graph;
Const n=65; n2=n div 2; { nхn - розмірність матриці вихідного зображення}
      m=5; m2=m div 2; { mхm - розмірність матриці структурного елемента}
      ON=TRUE; { піксель “1”, що належить об'єкту}
      OFF=FALSE; { піксель “0”, що належить фону}
Type AR=array[-n2..n2,-n2..n2 ] of boolean;
      BR=array[-m2..m2,-m2..m2 ] of boolean;
Var A,C,D:AR; B:BR;
{.....}
procedure dilation(var AX,CX:AR;var BX:BR); { процедура дилатації}
{на вході: AX - масив, що містить бінарне зображення,
          BX - масив, що містить бінарний структурний елемент}
{на виході: CX - масив, що містить результат дилатації}
var i, j, ii, jj : integer;
begin
  for i:=-n2+m2 to n2-m2 do for j:=-n2+m2 to n2-m2 do
    begin CX[i,j]:=OFF;
      for ii:=-m2 to m2 do for jj:=-m2 to m2 do
        if (BX[ii,jj]=ON)and(AX[i+ii,j+jj]=ON) then begin CX[i,j]:=ON; ii:=m2;jj:=m2;end;
        end;
```

```

end;
{.....}
begin {початок програми}
{.....}
dilation(A,C,B); {виклик процедури дилатації - результат буде в масиві C}
{.....}
end. {кінець програми}

```

Зробимо такі пояснення до даного фрагмента. Двовимірний масив $\mathbf{A}[i,j]$ подає повне бінарне зображення, що ми раніше визначали як універсальну множину і який складається як із “чорних” ON-пікселів, що відповідають об’єктам на зображенні (тобто множині A), так і “білих” OFF-пікселів, що відповідають фону (тобто множині A^c). Двовимірний масив $\mathbf{B}[i,j]$ подає бінарне зображення структурного елемента B , який, крім значущих ON-пікселів, може містити OFF-пікселі, що відповідають фону і не повинні впливати на результат дилатації. У даному алгоритмі вважається, що початок структурного елемента B сполучено з центральним елементом двовимірного масиву, тобто з елементом $\mathbf{B}[0,0]$. З міркувань симетрії, що в загальному випадку не є обов’язковими, масив $\mathbf{B}[i,j]$ є заданим квадратною (5x5)-матрицею. Розглянемо такі варіанти побудови матриці $\mathbf{B}[i,j]; |i, j| \leq 2$ для задання структурного елемента (SE):

| | | | | | |
|------------------------|-----------------|------------------------|--------------------------|------------------------|---------------------|
| 11111 | 01110 | 01110 | 00000 | 00000 | 00001 |
| 11111 | 11111 | 01110 | 11111 | 01110 | 00011 |
| 11111 | 11111 | 01110 | 11111 | 01110 | 00111 |
| 11111 | 11111 | 01110 | 11111 | 01110 | 00011 |
| 11111 | 01110 | 01110 | 00000 | 00000 | 00001 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| “квадратний” SE 5x5 | “круглий” SE | “вертикаль- ний” SE | “горизон- тальний” SE | “квадратний” SE 3x3 | “трикут- ний” SE |

По-перше, зазначимо, що при використанні структурних елементів номер 3 або 4 матриця $\mathbf{B}[i,j]$ може бути задана вже не як квадратна (5x5)-матриця, а як прямокутна розміром 5x3 або 3x5 відповідно; при використанні структурного елемента 5 розмір матриці $\mathbf{B}[i,j]$ може бути зменшений до розміру 3x3 – усі ці дії дозволять істотно збільшити швидкість обробки зображення.

По-друге, якщо значення *початку* структурного елемента зберігати в окремій змінній, не пов'язуючи його з елементом $\mathbf{V}[0,0]$, то в цьому випадку трикутний структурний елемент номер 6 також можна задати прямокутною матрицею розміру 5×3 , що забезпечить збільшення швидкості обробки при його застосуванні, але при цьому потрібна незначна переробка наведеного фрагмента програми.

Зазначимо також, що дилатація одиничним цифровим структурним елементом, цифрова модель якого описується матрицею розміром 1×1 (тобто масив $\mathbf{V}[i,j]$ містить тільки один ON-піксель), буде давати в результаті первісне бінарне зображення, причому це зображення буде зсунуте, якщо початок структурного елемента не буде збігатися з місцем розташування ON-пікселя. Незважаючи на практичну марність виконання дилатації таким структурним елементом, поняття одиничного цифрового структурного елемента відіграє вагомий роль у певних алгоритмах математичної морфології [10].

Нарешті зазначимо, що якщо цифровий структурний елемент порожній (тобто масив $\mathbf{V}[i,j]$ не містить жодного ON-пікселя), то в результаті дилатації будь-якого цифрового бінарного зображення буде отримана порожня множина, що практично буде виявлятися у зникненні первісного зображення.

Якщо рядок програми

```
if (BX[ii,jj]=ON)and(AX[i+ii,j+jj]=ON) then begin CX[i,j]:=ON; ii:=m2; jj:=m2; end;
```

замінити рядком

```
if (BX[ii,jj]=ON)and(AX[i-ii,j-jj]=ON) then begin CX[i,j]:=ON; ii:=m2; jj:=m2; end;
```

то наведена процедура “dilation” буде обчислювати не *дилатацію*, а *суму множин за Мінковським*, бо за рахунок знака “мінус” буде реалізована операція *відбиття* структурного елемента.

Наведений фрагмент програми можна модифікувати для обробки бінарних зображень великого розміру, які або зберігаються на жорсткому диску як файл даних, або відображаються на екрані дисплея. Розглянемо останній випадок, коли бінарне зображення відображається на екрані дисплея. Тоді замість використання двовимірного масиву великого розміру можна виконувати зчитування та запис значень цифрового зображення, працюючи безпосередньо з пам'яттю дисплея

(наприклад, за допомогою функції `getpixel` і процедури `putpixel` графічного середовища TurboPascal). Якщо застосувати цей підхід, то для обчислень може знадобитися буферний масив для тимчасового збереження оброблюваних фрагментів зображення, причому його розмір може дорівнювати розміру масиву, що застосовується для задавання структурного елемента. Якщо зображення займає не більше половини екрана, то буферний масив є непотрібним, бо результати обробки можна безпосередньо спрямовувати у вільну частину екрана.

На рис. 4.6 наведено приклади обробки тестового цифрового зображення за допомогою алгоритму дилатації при використанні різних структурних елементів.

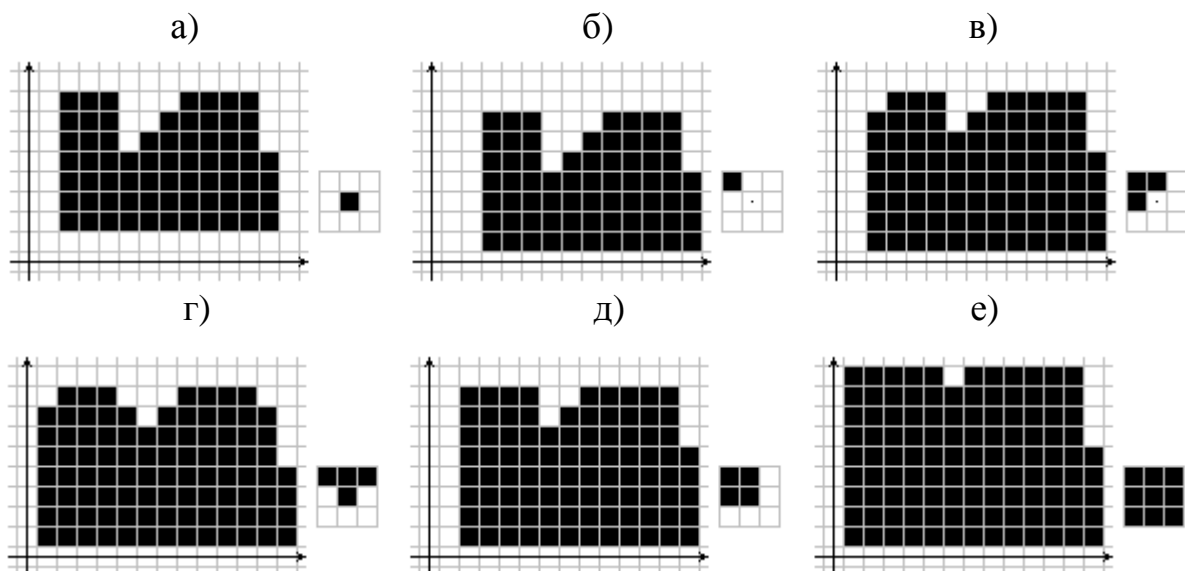


Рис. 4.6. Застосування процедури дилатації до тестового цифрового зображення:

а) тестове цифрове зображення; б)–е) результати дилатації (структурні елементи наведено праворуч)

Загальний ефект від застосування процедури дилатації полягає в “розширенні” тестового зображення.

4.2.2. Алгоритм ерозії

Обчислення ерозії бінарного зображення потребує виконання зсувів структурного елемента стосовно зображення і виконання операції узяття включення. Для цифрової реалізації зсувів зручно зафіксувати

структурний елемент і виконувати зсуви зображення стосовно структурного елемента; для реалізації операції включення можна використовувати поелементні логічні операції “і” та “ні”. Нижче наведено текст Pascal-процедури, що реалізує один із варіантів алгоритму ерозії.

```

procedure erosion(var AX,DX:AR;var BX:BR);
{на вході: AX - масив, що містить бінарне зображення,
  BX - масив, що містить бінарний структурний елемент}
{на виході: DX - масив, що містить результат ерозії}
var i,j,ii,jj:integer;
begin
for i:=-n2+m2 to n2-m2 do for j:=-n2+m2 to n2-m2 do
begin
  DX[i,j]:=ON;
  for ii:=-m2 to m2 do for jj:=-m2 to m2 do
    if BX[ii,jj] and (not AX[i+ii,j+jj]) then begin DX[i,j]:=OFF; ii:=m2; jj:=m2;end;
  end;
end;
end;

```

Якщо рядок

```
if BX[ii,jj] and (not AX[i+ii,j+jj]) then begin DX[i,j]:=OFF; ii:=m2; jj:=m2; end;
```

замінити рядком

```
if BX[ii,jj] and (not AX[i-ii,j-jj]) then begin DX[i,j]:=OFF; ii:=m2; jj:=m2; end;
```

то одержимо програмну реалізацію операції *віднімання множин за Мінковським*.

Очевидно, якщо множина є порожньою множиною, то результат її ерозії за допомогою непорожнього структурного елемента є порожня множина. Позначаючи порожню множину множиною “білих” пікселів, зазначимо, що в даному випадку як первісне зображення, так і результат його ерозії подають цілком “білі” зображення, що складаються з одних фонових OFF-пікселів.

Якщо первісна множина така, що не може цілком вмістити в собі структурний елемент ні при яких зсувах останнього, то в результаті ерозії також буде отримано порожню множину. Так, бінарне зображення, що складається з окремих незв'язаних “чорних” пікселів, розташованих на білому фоні, буде перетворено в результаті ерозії в повністю “біле” зображення, наприклад структурним елементом номер 1 (рис. 4.1). Такий же результат буде отриманий і для зображень, що складаються з вузьких ліній товщиною в один або два пікселі при використанні того самого структурного елемента. Але при використанні інших структурних елементів результат ерозії вузьких ліній може бути іншим. Якщо поодинокі “чорні” пікселі на “білому” фоні розглядаються як імпульсний шум на бінарному зображенні деяких протяжних “чорних” об'єктів, то в цьому випадку ерозія призводить до їх видалення, тобто про ерозію можна говорити як про процес фільтрації імпульсних перешкод. Проте така фільтрація, видаляючи імпульсні “піксельні” перешкоди, одночасно впливає і на “корисне” зображення об'єктів, спотворюючи їх форму. Крім того, якщо імпульсні перешкоди присутні на “чорному” зображенні об'єкта в інвертованому вигляді, тобто у вигляді “білих” пікселів, то в результаті зазначеної фільтрації “чорне” зображення об'єкта буде “роз'їдене”, причому форма та розмір “білих” дірок, які утворилися на ньому, будуть визначатися формою і розміром структурного елемента.

Якщо структурний елемент є порожньою множиною (коли матриця $\mathbf{V}[i,j]$ задана тільки “білими” OFF-пікселями), то в результаті застосування зазначеного алгоритму ерозії до будь-якої первісної множини (у тому числі й порожньої) буде отримана універсальна множина, тобто повністю “чорне” зображення.

На рис. 4.7 наведено приклади обробки тестового цифрового зображення.

Застосування алгоритму ерозії призводить до “стиску” тестового зображення.

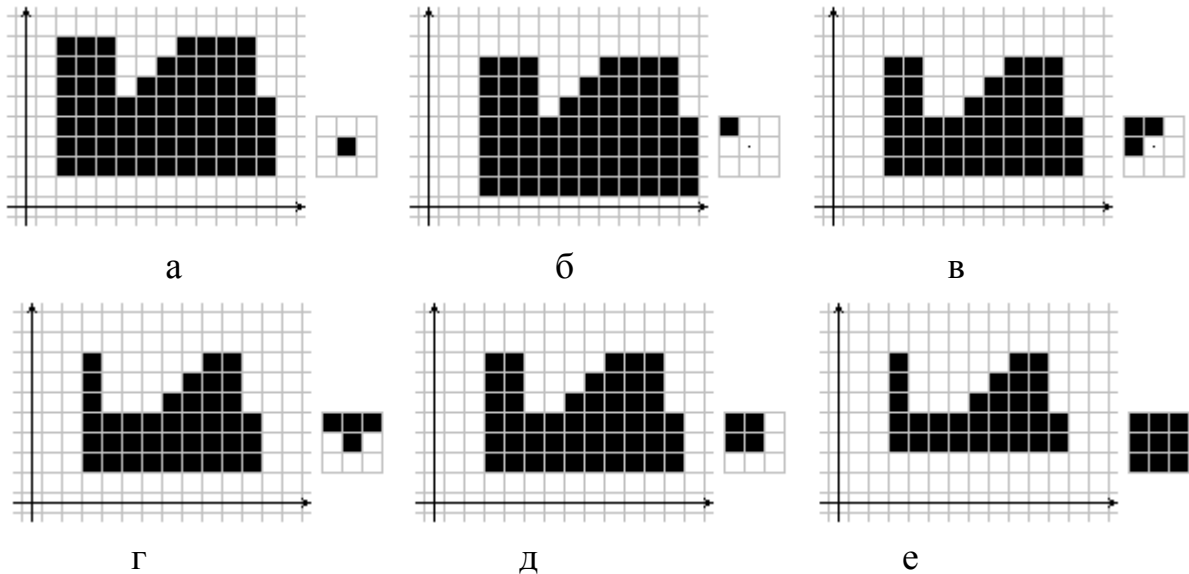


Рис. 4.7. Застосування процедури ерозії до тестового цифрового зображення:

а) тестове зображення; б)–е) результати ерозії (структурні елементи праворуч)

4.2.3. Алгоритми заповнення і поповнення. Морфологічні фільтри

Відповідно до (4.9), морфологічна операція заповнення множин (opening) складається з двох кроків: 1) до первісного зображення застосовується алгоритм ерозії; 2) до отриманого результату застосовується алгоритм додавання за Мінковським.

Якщо заданий структурний елемент є симетричним, то алгоритм заповнення може бути побудований на основі алгоритмів ерозії і дилатації.

Процес заповнення зображення об'єкта заданим структурним елементом можна розглядати як розміщення усередині зображення об'єкта таких зсунутих копій структурного елемента, які повністю належать зображенню об'єкта (рис. 4.8).

Якщо зображення об'єкта містить такі деталі, як вузькі виступи назвні або “перешийки”, то після застосування алгоритму морфологічного заповнення вони будуть видалені із зображення.

Якщо зображення спотворене імпульсним шумом типу “salt & pepper” (“сіль і перець” – білі й чорні точки на зображенні), то алгоритм морфологічного заповнення буде ефективним для видалення pepper-

компонент шуму і неефективним для видалення salt-компонент (рис. 4.8, д). Більш того, наявність перешкод у вигляді білих точок на чорному зображенні об'єкта може стати причиною “роз'їдання” об'єкта після застосування процедури заповнення, наприклад якщо ці точки знаходяться близько до границі об'єкта (рис. 4.8, е).

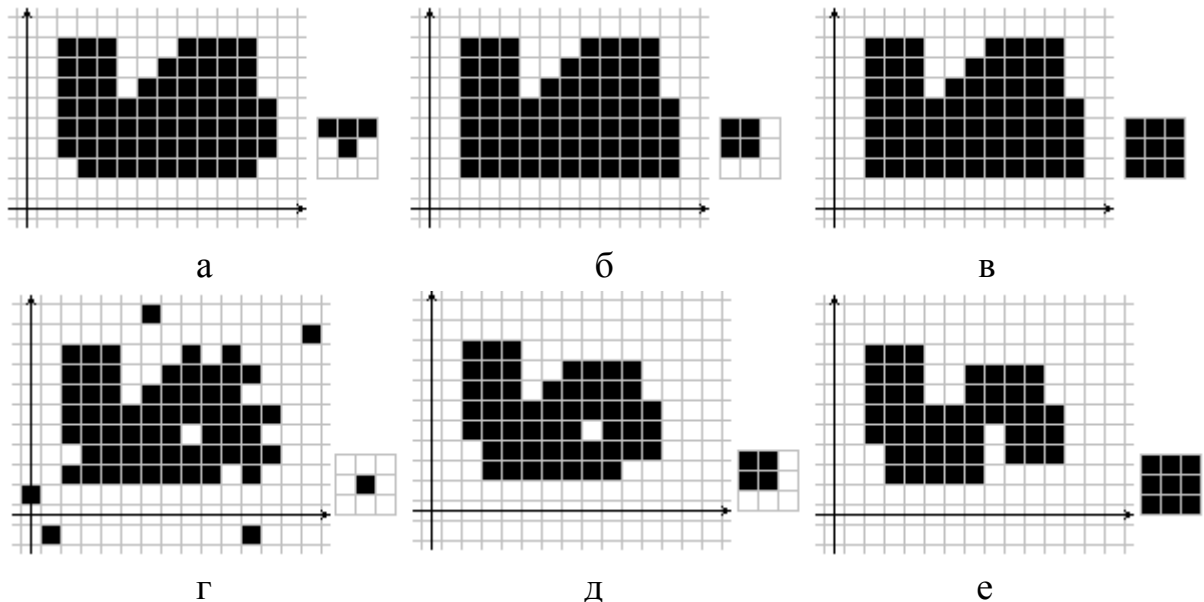


Рис. 4.8. Морфологічне заповнення тестових цифрових зображень:

а)–в) результати застосування заповнення до тестового зображення з рис. 4.7, а; г)–е) результати застосування заповнення до спотвореного шумом тестового зображення (структурні елементи наведено праворуч)

Згідно з (4.10), морфологічна операція поповнення (closing) складається з двох кроків: 1) до первісного зображення застосовується алгоритм дилатації; 2) до отриманого результату застосовується алгоритм віднімання за Мінковським.

Якщо заданий структурний елемент є симетричним, то алгоритм поповнення може бути побудований на основі алгоритмів дилатації й ерозії. Процес поповнення зображення об'єкта заданим структурним елементом можна розглядати як процес розміщення поза зображенням об'єкта (тобто в доповненні зображення об'єкта) таких зсунутих копій структурного елемента, які повністю не належать зображенню об'єкта; доповнення (інверсія) від отриманого зображення і буде являти собою поповнення зображення об'єкта (рис. 4.9).

Якщо зображення об'єкта містить такі деталі, як вузькі щілини, провали всередину, розриви, то після застосування алгоритму поповнення вони будуть видалені із зображення. Алгоритм морфологічного поповнення є ефективним для видалення salt-компонент шуму і неефективним для видалення pepper-компонент.

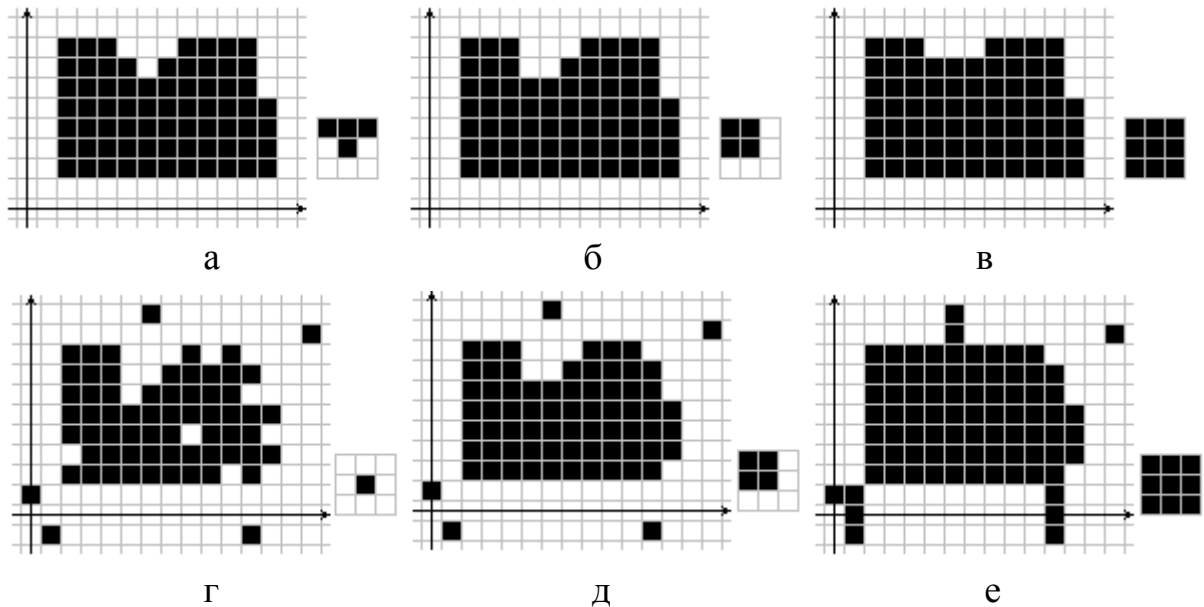


Рис. 4.9. Морфологічне поповнення тестових цифрових зображень:

а)–в) результати застосування процедури поповнення до тестового зображення з рис. 4.7, а; г)–е) результати застосування процедури поповнення до спотвореного шумом зображення (структурні елементи наведено праворуч)

Морфологічний фільтр – це фільтр, який заснований на морфологічних перетвореннях. До найпростіших морфологічних фільтрів часто відносять дилатацію (фільтр розширення), ерозію (фільтр стиску), а також їх комбінації у вигляді процедур заповнення і поповнення зображень [9; 10]. Але, як було вказано вище, дані фільтри не завжди ефективні для обробки зображень, спотворених імпульсним шумом. Кращі характеристики з погляду видалення імпульсних перешкод має група фільтрів, які засновані на комбінуванні процедур заповнення і поповнення, а саме фільтр “заповнення-поповнення” (opening-closing) і фільтр “поповнення-заповнення” (closing-opening). Як зрозуміло з назв, фільтр “заповнення-поповнення” передбачає

послідовне виконання морфологічних операцій заповнення та поповнення, а фільтр “поповнення-заповнення” – операцій поповнення та заповнення.

4.2.4. Алгоритм порівняння

Відповідно до (4.13), обчислення операції *порівняння* вихідного бінарного зображення із заданим структурним елементом потребує виконання двох операцій ерозії і операції узяття перерізу. При цьому структурний елемент B повинен бути заданий впорядкованою парою множин (B^1, B^2) , де B^1 є множина пікселів, що визначає *аналізовану* форму на зображенні і яка застосовується для еродування зображення, а B^2 є множина пікселів, що визначає заданий *окіл аналізованої* форми і яка застосовується для еродування *доповнення* зображення. Множини B^1 та B^2 не можуть перерізатися.

Із погляду програмної реалізації операції порівняння, відповідно до (4.13), необхідно задавати два масиви $\mathbf{B1}[i,j]$ і $\mathbf{B2}[i,j]$, один із яких застосовується для обчислення ерозії первісного зображення, а другий – для обчислення ерозії зображення, що є доповненням первісного зображення й утворюється в результаті застосування до усіх елементів первісного зображення логічної операції *pot*. При цьому масиви $\mathbf{B1}[i,j]$ і $\mathbf{B2}[i,j]$ не повинні мати загальних “чорних” ON-пікселів, але можуть мати скільки завгодно загальних “білих” OFF-пікселів, які просто ігноруються при обчисленнях ерозії.

При обчисленні порівняння зазначені операції ерозії можуть виконуватися паралельно, а алгоритм порівняння має такий вигляд. Первісне зображення надходить на два цифрових пристрої: у першому обчислюється ерозія зображення за допомогою B^1 , у другому – ерозія інвертованого зображення за допомогою B^2 , після чого обчислюється переріз двох отриманих зображень.

Структурний елемент B можна описати не двома, а однією цифровою матрицею, якщо ввести в розгляд не два, а три значення для елементів множини B : “1” – “чорний” ON-піксель заданої форми, “0” – “білий” OFF-піксель заданого околу, “x” – довільний ANY-піксель фону, значення якого не впливає на результат морфологічної операції. Саме в такому вигляді подано деякі структурні елементи на рис. 4.1.

Операція порівняння є більш тонким інструментом аналізу, ніж ерозія, тому що аналізу піддається не тільки форма фігури, але й окіл форми фігури. Наприклад, якщо зображення складається з двох непересічних та двох пересічних кругів однакового радіуса, то застосування операції ерозії зі структурним елементом у формі круга такого самого радіуса забезпечує одержання зображення, що складається з 4 точок (що дорівнює числу кругів), а в результаті застосування операції порівняння вихідного зображення з таким же круглим структурним елементом, але з урахуванням околу у формі кільця, що охоплює заданий круг, може бути отримано 0, 1 або 2 точки залежно від розміру кільцевого околу. Якщо ж окіл має іншу форму, то результат порівняння буде лежати в діапазоні від 0 до 4 точок на результуючому зображенні. Таким чином, використовуючи ерозію і порівняння, можна вирішити, наприклад, задачу підрахунку кількості пересічних та непересічних об'єктів на зображенні; на практиці ця задача застосовується у медицині (підрахунок числа кров'яних тілець на мікрофотографіях [8]).

На обчисленні порівняння засновані різноманітні морфологічні алгоритми; при цьому зазвичай використовується набір структурних елементів, що утворюються, наприклад, шляхом обертання заданого структурного елемента разом з околom на заданий кут.

Застосування операції порівняння дозволяє виявляти різні топологічні властивості досліджуваних об'єктів [8].

Якщо окіл не задається, то *порівняння* переходить в *ерозію*.

4.2.5. Алгоритм символної підстановки

Символьна підстановка описується співвідношенням (4.16) і практично полягає в заміні одного символу (фігури) іншим символом (фігурою). Ця надзвичайно корисна морфологічна операція може застосовуватися для корекції геометричних спотворень або виступати як заключний крок для наочного представлення результатів. Розглянемо останній випадок на прикладі задачі виділення фігур заданої форми з множини фігур.

Нехай потрібно виділити зі скінченної множини рівносторонніх трикутників, що задані на площині, тільки ті трикутники, що мають

сторону довжиною a ; для спрощення задачі будемо також вважати, що усі трикутники мають сторону, рівнобіжну осі OY (або певній іншій прямій) і кут, протилежний цій стороні, є розташованим праворуч. Якщо трикутники попарно не перерізаються, то алгоритм розв'язку такої задачі є таким:

- 1) задати структурний елемент B_1 у формі шуканого трикутника;
- 2) виконати ерозію вихідної множини трикутників A множиною B_1 , тобто знайти ті точки площини, при зсувах в які $B_1 \subset A$;
- 3) до отриманої множини точок (можливо, що таких точок взагалі не буде) застосувати операцію додавання за Мінковським зі структурним елементом B_2 (він виконує роль маркера-мітки і може описувати певну геометричну фігуру заданої форми; зокрема, якщо $B_2 = B_1$, то результуюче зображення буде містити тільки рівносторонні трикутники із заданою довжиною сторони a).

Якщо трикутники перерізаються, то алгоритм розв'язку даної задачі ускладнюється, тому що в результаті перерізу великих трикутників можуть утворитися менші трикутники зі стороною a . Тут є можливим такий алгоритм: виділити на площині й потім видалити трикутники з найбільшою стороною (не вилучаючи точки перерізу з іншими трикутниками), потім – з меншою і т.д., доки на етапі пошуку не з'являться трикутники зі стороною a , до яких потрібно застосувати символну підстановку.

Таким чином, операцію символної підстановки можна розглядати як послідовність операцій узгодженої (за формою об'єкта) фільтрації й маркування зображення.

4.2.6. Виділення границь зображення

Границя $\beta(A)$ певної множини A зазвичай визначається як множина граничних точок множини A , будь-який окіл кожної з яких містить точки з A й точки з A^c . У рамках методів морфологічної обробки для виділення границі $\beta(A)$ бінарного зображення A застосовується формула [11]

$$\beta_1(A) = A - (A \hat{\ominus} B) , \quad (4.17)$$

де B – певний структурний елемент. Таким чином, для виділення границі необхідно виконати ерозію первісного зображення і відняти отриманий результат із первісного зображення.

Обґрунтування придатності (4.17) полягає в тому, що $\beta_1(A) \subset A$, тобто границя повністю складається з точок множини A , що відповідає першій умові традиційного визначення; для забезпечення виконання другої умови розмір структурного елемента B повинен бути достатньо малий і в граничному випадку збігатися до нуля.

Крім (4.17), можливі також інші підходи до виділення границі множини A . Наприклад, можуть бути використані такі співвідношення, що є варіантами визначень *морфологічних градієнтів* [12]:

$$\beta_2(A) = A \oplus \hat{B} - A ; \quad (4.18)$$

$$\beta_3(A) = A \oplus \hat{B} - (A \cap \hat{B}) . \quad (4.19)$$

Тут $\beta_2(A) \subset A^c$; $\beta_3(A) \cap A \neq \emptyset$ і $\beta_3(A) \cap A^c \neq \emptyset$. Виходячи з одержуваних відношень, $\beta_1(A)$, $\beta_2(A)$, $\beta_3(A)$ можна умовно назвати “внутрішньою”, “зовнішньою” і “серединною” границями зображення A відповідно.

Механізм виділення границі $\beta_1(A)$ для тестового бінарного цифрового зображення наведено на рис. 4.10.

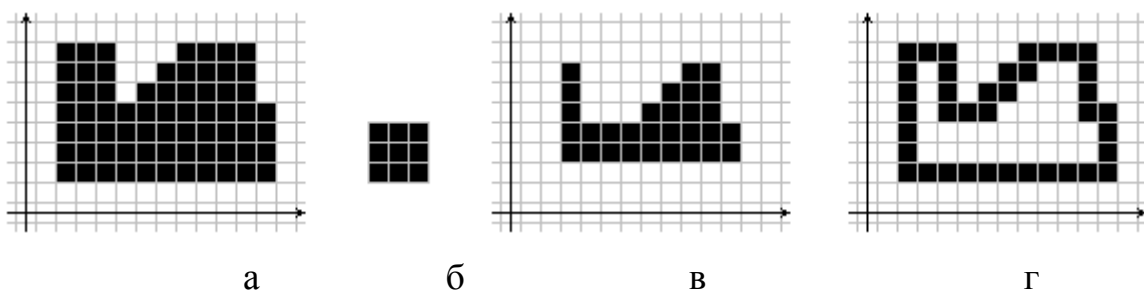


Рис. 4.10. Виділення границі бінарного зображення:

- а) тестове зображення A ; б) структурний елемент B ;
в) результат ерозії $A \ominus \hat{B}$; г) границя $\beta_1(A) = A - (A \ominus \hat{B})$

Алгоритм порівняння також може бути використаний для побудови границь. На рис. 4.11 наведено відповідні результати виділення границь тестового зображення A (рис. 4.10, а) за допомогою операції порівняння

для двох різних наборів структурних елементів. Очевидно, що об'єднання двох отриманих границь дає границю $\beta_1(A)$.

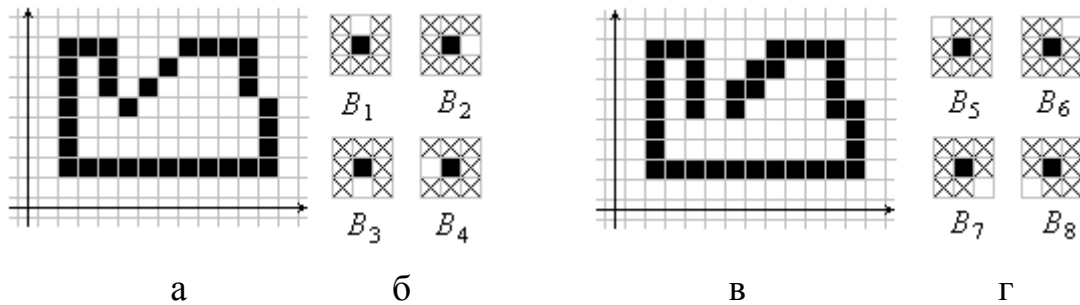


Рис. 4.11. Виділення границь бінарного зображення на основі алгоритму порівняння:

а), в) отримані границі зображення як результат операції порівняння;
б), г) відповідні набори структурних елементів

Структурний елемент, наведений на рис. 4.10, б, частіше використовується на практиці, тому що він забезпечує побудову границі, товщина якої може варіюватися між 1 і 2 пікселями. Проте такий вибір не завжди є найкращим. У кожному конкретному випадку при виборі форми структурного елемента і його розміру повинні враховуватися не тільки геометричні властивості зображення, але й геометричні властивості різних перешкод, які можуть спотворювати границі на зображенні.

4.2.7. Виділення зв'язних компонент

Задача виділення зв'язних компонент на бінарному зображенні є однією з центральних задач у багатьох додатках автоматизованого аналізу зображень.

Нехай Y являє собою зв'язну компоненту, що міститься у множині A . Нехай відома точка p , що належить множині Y . Для пошуку усіх інших елементів множини Y можна використовувати такий ітераційний процес:

$$X_k = (X_{k-1} \oplus \hat{B}) \cap A; \quad k=1,2,\dots, \quad (4.20)$$

де $X_0=p$ і B – певний структурний елемент (наприклад, номер 1 на рис. 4.1). Якщо $X_k = X_{k-1}$, то алгоритм (20) зупиняємо і вважаємо, що $Y=X_k$.

4.2.8. Морфологічне стоншення і стовщення

Морфологічне *стоншення* множини A позначимо символом \diamond і визначимо співвідношенням [11]

$$A \diamond B = A - (A \otimes B) = A \cap (A \otimes B)^c. \quad (4.21)$$

Відповідно до (4.21), *стоншення* множини полягає в послідовному виконанні операцій *порівняння* і *віднімання*.

Найбільш часто на практиці використовується симетричне стоншення, що засноване на застосуванні певної заданої послідовності структурних елементів B^1, B^2, \dots, B^n , де B^i є результатом обертання B^{i-1} . Для прямокутного растра можна одержати групу з чотирьох різних структурних елементів шляхом їх обертання на 90° ; для гексагонального растра число таких елементів у групі не більше 6. Для одержання більш довгих послідовностей об'єднують декілька груп, наприклад дві, утворені обертанням структурних елементів 4 і 5 (див. рис. 4.1) [11].

Процес морфологічного стоншення зображень об'єктів при застосуванні послідовності структурних елементів B^1, B^2, \dots, B^n зазвичай будується за ітераційною схемою: на кожній ітерації такого процесу послідовно виконуються операції *стоншення* шляхом одного проходу структурним елементом B^1 , потім – шляхом одного проходу B^2 і т.д. і, нарешті, шляхом одного проходу B^n . Дані ітерації повторюються, доки результат не перестане змінюватися [11].

Морфологічне *стовщення* множини A позначимо \in і визначимо так [11]:

$$A \in B = A \cup (A \otimes B). \quad (4.22)$$

Відповідно до (4.22), *стовщення* складається з операцій *порівняння* й *об'єднання*, де B – заданий структурний елемент або послідовність елементів, розглянута вище. На практиці співвідношення (4.22) використовують рідко [11]; замість цього виконують стоншення *доповнення* множини (тобто фону зображення), а потім беруть доповнення від отриманого результату.

Інші методи й алгоритми морфологічної обробки бінарних і напівтонових зображень можна знайти в [1–15], а також у довідковому посібнику обчислювального середовища MatLab.

Контрольні питання

1. Яка морфологічна операція збільшує (розширює) початкову множину, а яка операція – зменшує (стискає) її?
2. На папері "у клітинку" подайте свій приклад простого цифрового бінарного зображення і наведіть результати його розширення і стиску за допомогою квадратного структурного елемента розміром 3×3 .
3. На папері "у клітинку" подайте свій приклад простого цифрового бінарного зображення і наведіть результати його розширення і стиску за допомогою хрестоподібного структурного елемента розміром 3×3 .
4. У чому відмінність між операціями додавання за Мінковським і дилатацією?
5. В основі усієї теорії математичної морфології лежить одна-єдина нетрадиційна операція над множинами в евклідовому просторі. Що це за операція?
6. Операція додавання множин за Мінковським визначена в евклідовому просторі чи на множині усіх підмножин евклідового простору?
7. Чи можна виразити операції віднімання за Мінковським й ерозії через операцію додавання за Мінковським? Які традиційні операції ще потрібні?
8. Яку форму в просторі E^2 має множина, якщо вона отримана в результаті дилатації множини у формі правильного трикутника тією самою множиною?
9. У результаті додавання за Мінковським і дилатації множини (з E^2) у формі правильного трикутника тією самою множиною отримують різні за формою множини. Чи є рівними їхні площі? Чи є рівними їхні периметри?

10. Яку форму буде мати множина, отримана в результаті розширення множини у формі правильного трикутника множиною у формі квадрата?
11. Яку форму буде мати множина, отримана в результаті розширення множини у формі правильного трикутника множиною у формі круга?
12. Яку форму буде мати множина, отримана в результаті стиску множини у формі правильного трикутника множиною у формі квадрата?
13. Яку форму буде мати множина, отримана в результаті стиску множини у формі правильного трикутника множиною у формі круга?
14. Записати співвідношення, що визначають дилатацію множини A множиною B і дилатацію множини B множиною A у виді, аналогічному (4.3).
15. Наведіть 2–3 приклади симетричних і несиметричних множин евклідового простору E^n для $n=1, 2, 3, 4$.
16. Наведіть приклади множин, які можна зробити симетричними за допомогою операції зсуву.
17. Наведіть приклади множин, які не можна зробити симетричними за допомогою їх зсуву.
18. Нехай $B=\{x\}$ – одинична множина, де x – довільний вектор простору E^n , довжина якого не дорівнює нулю. Обчислити результати таких морфологічних операцій та їх комбінацій:
- 1) $A \oplus B$; 2) $A \oplus \hat{B}$; 3) $A \subset B$; 4) $A \subset \hat{B}$;
 5) $(A \subset \hat{B}) \oplus B$; 6) $(A \subset B) \oplus B$; 7) $(A \oplus \hat{B}) \subset B$; 8) $(A \oplus B) \subset B$;
 9) $(A \subset \hat{B}) \oplus \hat{B}$; 10) $(A \subset B) \oplus \hat{B}$; 11) $(A \oplus \hat{B}) \subset \hat{B}$; 12) $(A \oplus B) \subset \hat{B}$.
- Можливими є відповіді: $A, A_x, A_{-x}, A_{2x}, A_{-2x}$.
19. Нехай $B=\{0, x\}$ – множина, що складається з двох векторів простору E^n (де перший вектор – це нульовий вектор 0 , а другий – це вектор x). Використовуючи операції об'єднання, перерізу, зсуву множин, записати результати таких морфологічних операцій:
- 1) $A \oplus B$; 2) $A \oplus \hat{B}$; 3) $A \subset B$; 4) $A \subset \hat{B}$; 5) $(A \subset \hat{B}) \oplus B$;
 6) $(A \oplus \hat{B}) \subset B$.

З'ясувати, за яких умов для заданого структурного елемента B результат операції \ominus буде завжди збігатися з множиною A . Навести також приклад (для випадку простору E^2), коли результат операції \ominus не збігається з множиною A .

20. Виконати графічні ілюстрації до операції *віднімання множин за Мінковським*.
21. З'ясувати, чи можна стверджувати, що $A \subseteq B \subset A$?
22. Показати, що якщо $B \neq \emptyset$, то $A \subseteq B \subset A \oplus B$.
23. Дати ілюстрацію процесу ерозії множини A наведеним на рис. 4.5, ж квадратним структурним елементом B удвічі меншого розміру.
24. Зробити висновок про те, чи збігаються в загальному випадку результати заповнень $A \circ B$ і $A \circ \hat{B}$.
25. Зробити висновок про те, чи збігаються в загальному випадку результати поповнень $A \bullet B$ і $A \bullet \hat{B}$.
26. В чому сенс операції порівняння множин? Що позначають поняття "hit-" і "miss"-елементів?
27. Що означає поняття "символьна підстановка"?
28. Побудувати границі $\beta_2(A)$, $\beta_3(A)$ для зображення, наведеного на рис. 4.10, а.
29. Як реалізується фільтр "opening-closing"? Для яких цілей він застосовується?
30. Як реалізується фільтр "closing-opening"? Для яких цілей він застосовується?

Лабораторна робота № 4

Тема: *Морфологічні методи обробки бінарних зображень.*

Мета: Вивчення методів морфологічної обробки бінарних зображень.

Завдання до лабораторної роботи. Лабораторна робота містить 3 завдання; кожне завдання має різні варіанти. Для виконання лабораторної роботи необхідно виконати зазначені викладачем варіанти завдань, представити короткий звіт і захистити отримані результати.

Звіт оформляється друкованим чи рукописним способом і повинен містити *тільки результати* виконання завдань.

Завдання 1. Моделювання дилатації, ерозії, заповнення і поповнення.

Виконати моделювання процесів дилатації, ерозії, заповнення і поповнення заданих цифрових бінарних зображень заданими структурними елементами.

1.1. Як первісні зображення використовувати бінарні зображення, що видає викладач, або бінарні зображення заданого символу (табл. 4.1) екранного шрифту Times New Roman різного накреслення (звичайний, курсив, напівжирний) і розмірів (12pt, 16pt, 20 pt).

1.2. Обробку зображень виконувати структурними елементами з табл. 2, номери яких вказано в табл. 4.1 відповідно до номера варіанта.

1.3. Порівняти отримані результати з первісним зображенням і пояснити їх.

1.4. Підрахувати, скільки разів необхідно виконати ерозію заданих бінарних зображень для того, щоб вони були цілком вилучені. Результати занести в таблицю, вказуючи номер зображення, номер структурного елемента і кількість ерозій.

Завдання 2. Виділення границь бінарного зображення.

2.1. Для заданих цифрових бінарних зображень отримати їх границі $\beta_1(A)$, $\beta_2(A)$ і $\beta_3(A)$, застосовуючи структурні елементи номер 1, 7 і 8. Підрахувати число пікселів, що складають отримані границі.

2.2. На задані бінарні зображення накласти імпульсний шум типу "сіть і перець" і повторити виконання пункту 1.1.

2.3. Застосовуючи морфологічний фільтр "заповнення-поповнення", виконати морфологічну фільтрацію зашумленого зображення, після чого повторити виконання пункту 1.1.

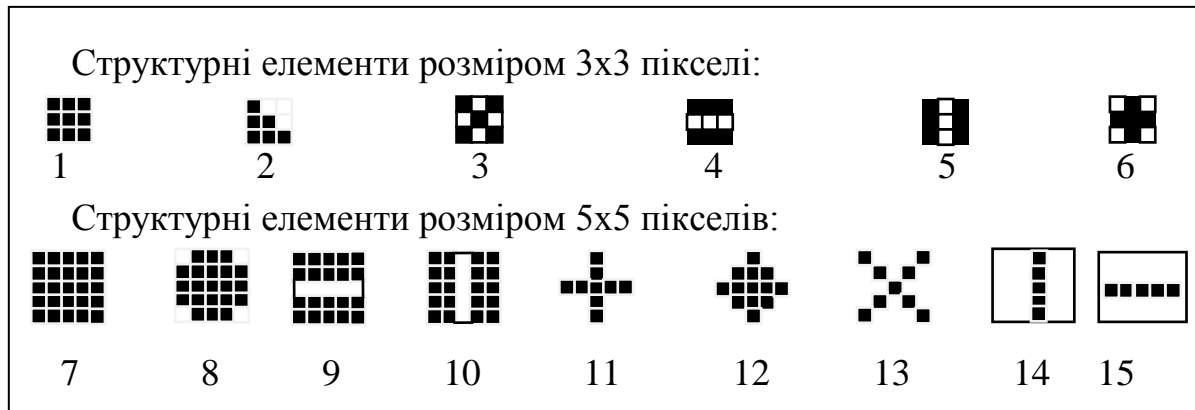
2.4. Отримані результати занести в таблицю, відзначаючи суб'єктивну якість границь і вказуючи кількість пікселів, що складають границю.

Таблиця 4.1

Номери варіантів завдань, зображень та структурних елементів

| Номер варіанта | Номер зображення (чи символ) | Номери структурних елементів |
|----------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 1 (А) | 1, 2, 3 |
| 2 | 2 (Б) | 1, 5, 10 |
| 3 | 3 (У) | 1, 4, 11 |
| 4 | 4 (Г) | 1, 7, 9 |
| 5 | 5 (Д) | 1, 5, 13, |
| 6 | 6 (Е) | 1, 3, 15 |
| 7 | 7 (Ж) | 1, 8, 14 |
| 8 | 8 (З) | 1, 6, 10 |
| 9 | 9 (І) | 1, 4, 7 |
| 10 | 10 (Ї) | 1, 3, 13 |
| 11 | 11 (Й) | 1, 8, 10 |
| 12 | 12 (К) | 1, 7, 12 |
| 13 | 13 (Л) | 1, 12, 14 |
| 14 | 14 (М) | 1, 11, 12 |
| 15 | 15 (Н) | 1, 14, 15 |
| 16 | 16 (О) | 1, 5, 8 |
| 17 | 17 (П) | 1, 6, 12 |
| 18 | 18 (Р) | 1, 3, 7 |
| 19 | 19 (З) | 1, 4, 14 |
| 20 | 20 (Т) | 1, 9, 11 |
| 21 | 21 (У) | 1, 8, 12 |
| 22 | 22 (Ф) | 1, 2, 12 |
| 23 | 23 (Х) | 1, 7, 11 |
| 24 | 24 (Ц) | 1, 8, 14 |
| 25 | 25 (Ш) | 1, 3, 9 |
| 26 | 26 (Щ) | 1, 4, 6 |
| 27 | 27 (Ю) | 1, 3, 15 |
| 28 | 28 (Я) | 1, 2, 10 |
| 29 | 29 (Є) | 1, 2, 14 |
| 30 | 30 (Ь) | 1, 7, 12 |

Структурні елементи

**Завдання 3.** Підрахунок числа об'єктів на зображенні.

3.1. Отримати набір зображень, до якого входять бінарне зображення тексту, штучне бінарне зображення множини геометричних фігур різної форми і розмірів та напівтонове зображення з природною сценою, що складається з множини приблизно однакових за формою об'єктів.

3.2. Підрахувати кількість об'єктів заданої форми і розмірів на бінарних зображеннях з текстом та геометричними фігурами. Для цього, обравши відповідний до заданої форми та розміру структурний елемент, знайти на бінарному зображенні тільки ті компоненти, які мають задану форму й розмір, та підрахувати їх кількість. Результат представити у вигляді бінарного зображення, на якому повинні бути тільки компоненти заданої форми. Дати словесний опис алгоритму, який було застосовано.

3.3. Підрахувати кількість об'єктів заданої форми і розмірів на напівтоновому зображенні. Для цього з напівтонового зображення за допомогою операції бінарного квантування отримати бінарне зображення та видалити (якщо це потрібно) імпульсний шум. Потім вказати на певну компоненту бінарного зображення як на еталон для пошуку інших (аналогічних за формою та розміром) компонент та сформулювати два структурних елементи, де перший структурний елемент отримати з еталону за рахунок його розширення (дилатації) на 1–2 пікселі, а другий – за рахунок стиску (ерозії) еталону на 1–2 пікселі. Після цього застосувати зазначені структурні елементи таким чином,

щоб залишити на бінарному зображенні тільки ті компоненти, які не “більші” за перший структурний елемент і не “менші” за другий структурний елемент. Підрахувати кількість знайдених компонент, а також площу кожної знайденої компоненти (як кількість пікселів). Отримати (виділити) границю кожної знайденої компоненти та підрахувати її довжину (як кількість пікселів). Результат представити таблицею з площ та довжин границі кожної компоненти, а також напівтоновим зображенням з позначкою порядкового номера знайденої компоненти (який подавати числом на місці її розташування) та з обведеною границею кожної компоненти умовним (наприклад, червоним) кольором.

Література

1. Матерон Ж. Случайные множества и интегральная геометрия / Ж. Матерон. – М. : Мир, 1978.
2. Serra J. Image analysis and mathematical morphology / J. Serra. – N.Y. : Academic Press, 1982.
3. Serra J. Image analysis and mathematical morphology / J. Serra. – N.Y. : Academic Press, 1988. - Vol.2: Theoretical advances.
4. Пытьев Ю.П. Морфологический анализ изображений / Ю.П. Пытьев // Докл. АН СССР. – 1975. - Т. 224. – № 6.
5. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн. 2. – 480 с.
6. Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт; пер. с англ.; под ред. В.Л. Стефанюка. – М. : Мир, 1976. – 512 с.
7. Косых В.П. Программная реализация морфологического процессора / В.П. Косых, А.И. Пустовских, Н.С. Яковенко // Автометрия. – 1982. – № 4. – С. 103-105.
8. Косых В.П. Морфологический процессор / В.П. Косых, А.И. Пустовских, Е.В. Тарасов, Н.С. Яковенко // Автометрия. – 1984. – № 4. – С. 102–109.
9. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т.С. Хуанг, Дж.-О. Эклунд, Г.Дж. Нуссбаумер и др. ; под ред. Т.С. Хуанга; пер. с англ. – М. : Радио и связь, 1984. – 224 с.

10. Venetsanopoulos A.N. Digital image processing and applications. Chapter 3: Nonlinear, adaptive and morphological filters. / Department of Electrical and Computer Engineering, University of Toronto, Canada, 1996. – 598 p.
11. Gonzalez R.C., Basart J.P. Introduction to binary morphology //Advances in image analysis / Editors: Y. Mahdavih, R.C. Gonzalez. – Bellingham, Washington, USA. : A Publication of SPIE, 1992.
12. Basart J.P., Chackalackal M.S., Gonzalez R.C. Introduction to gray-scale morphology // Advances in image analysis / Editors: Y. Mahdavih, R.C. Gonzalez. – Bellingham, Washington, USA. : A Publication of SPIE, 1992.
13. Visual Communications and Image Processing'92/ Editor Petros Maragos. - Bellingham, Washington, USA.: A Publication of SPIE, 1992. – V.1818. - Part 1, 2.
14. Proceedings of ISMM'96 – International Symposium on mathematical morphology and its application to image and signal Processing III. – Atlanta, USA. – 1996.
15. Исаев У.Т. Оптическое распознавание образов / У.Т. Исаев // Зарубежная радиоэлектроника. – 1989. – № 11. – С. 39–59.
16. Препарата Ф. Вычислительная геометрия: введение / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М. : Мир, 1989.

Додаток 4.1

Приклади зображень для завдання 3 подано на рис.4.12 – 4.14.

1.1.Получить набор изображений (бинарное изображение текста, искусственное бинарное изображение множества пересекающихся геометрических фигур различной формы и размеров, полутоновое изображение с естественной сценой, состоящей из множества однотипных объектов).

1.1.Получить набор изображений (бинарное изображение текста, искусственное бинарное изображение множества пересекающихся геометрических фигур различной формы

Рис. 4.12. Зображення 1

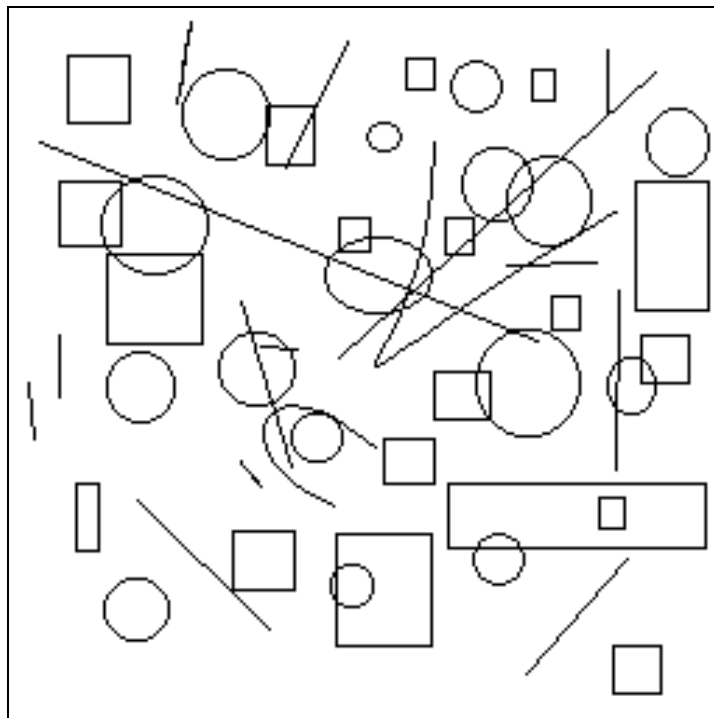


Рис. 4.13. Зображення 2

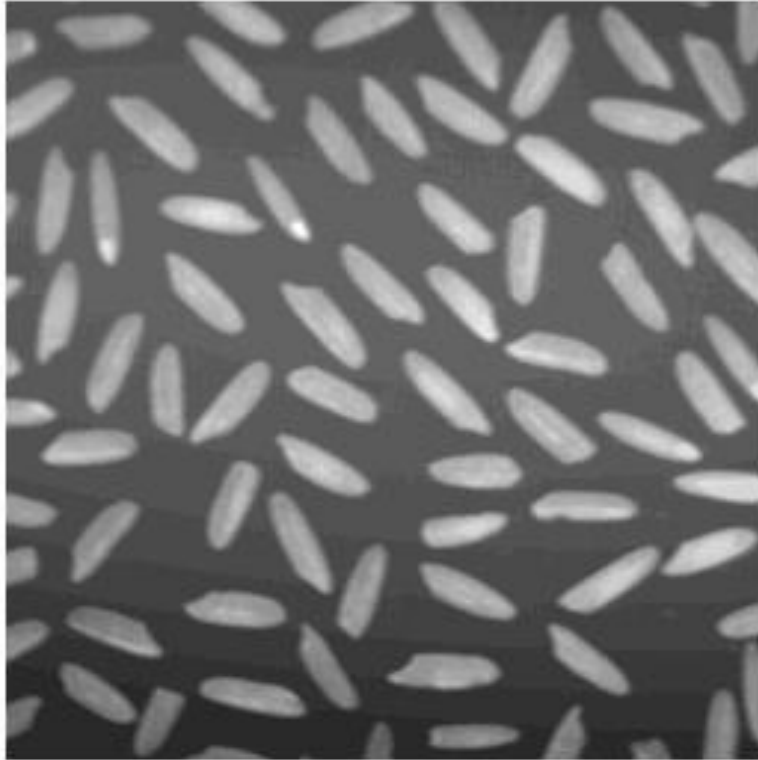


Рис. 4.14. Зображення 3

РОЗДІЛ 5. КОМП'ЮТЕРНИЙ СТЕРЕОЗІР

Комп'ютерний зір (computer vision) являє собою наукову дисципліну, яка вивчає теорію і базові алгоритми аналізу зображень і сцен [1]. Основними задачами в галузі комп'ютерного зору є побудова придатних для подальшого практичного використання моделей камер, які реєструють зображення (наприклад, камера-обскура, камери з лінзами, око людини), та засобів калібрування камер, побудова моделей зображень (зокрема, кольорових зображень) та моделей їх спотворень, а також побудова геометричних моделей представлення 3D-зображень через їх проєкції, що складають основу методів та алгоритмів візуалізації, аналізу, розпізнавання та сприйняття навколишнього простору певною інтелектуальною системою. Серед основних методів комп'ютерного зору можна вказати на методи визначення афінної та проєктивної структур за рухом об'єкта, методи супроводження рухомого об'єкта, методи пошуку в цифрових бібліотеках, методи побудови 3D-моделей за послідовністю зображень, а також методи візуального аналізу та оцінювання кількості й параметрів об'єктів сцени [2]. Останнє коло задач найбільш часто розв'язується за допомогою методів комп'ютерного стереозору.

Поряд з терміном «комп'ютерний зір» в науковій літературі часто вживаються такі поняття, як машинний зір (machine vision), зір роботів (robot vision), обробка зображень (image processing), розуміння зображень (image understanding).

Машинний зір є більш технологічною областю наукових та інженерних знань, що охоплює такі проблеми розробки практичних систем, як вибір схем освітлення досліджуваної сцени, вибір характеристик відеосенсорів (відеодатчиків), їх кількості та геометрії розташування, питання калібрування та орієнтування відеосенсорів у просторі, вибір та розробка устаткування для оцифрування і процесорної обробки відеоданих, розробка власне алгоритмів і їх комп'ютерна реалізація [1].

Зір роботів звичайно трактують як більш вузьку область технологій машинного зору, яка забезпечує функціонування систем машинного зору в умовах жорстких часових обмежень [3]. До цього поняття відносять проблеми розробки заснованих на зображеннях

інформаційних систем, що входять до складу систем управління складними динамічними об'єктами такими як літак, автомобіль, системи контролю технічних і технологічних процесів на виробництві, тощо. В цих задачах існує необхідність формування зворотних зв'язків за результатами обробки вхідних зображень у системах управління, що вимагає їх швидкої обробки та аналізу в реальному масштабі часу.

Термін «обробка зображень» в останні роки частіше вживається не як позначення наукової дисципліни [4]-[5], а як вказівник на предметну область. Крім того, цей термін вживається також для позначення обробки нижнього рівня, коли результатом обробки зображення знову є зображення. У той же час термін «розуміння зображень» вживається для обробки верхнього рівня, часто в контексті застосування методів штучного інтелекту [1].

Комп'ютерний зір пов'язаний з цілим рядом суміжних дисциплін, а саме зі штучним інтелектом (artificial intelligence), розпізнаванням образів (pattern recognition) і цифровою фотограмметрією (digital photogrammetry).

Цифрова фотограмметрія є дисципліною, що прийшла на зміну аналітичної фотограмметрії. Якщо класична аналітична фотограмметрія вивчала переважно метричні співвідношення між точками знімків і реальної сцени, то сучасна цифрова фотограмметрія розв'язує задачі аналізу і 3D-опису сцен за відеоданими від оптичних сенсорів. У широкому розумінні в даний час використовують терміни «digital close-range photogrammetry» і «machine vision» практично як синоніми [1]. У вузькому розумінні вважається, що цифрова фотограмметрія концентрується насамперед не на питаннях розуміння сцени або виявлення об'єктів, а на питаннях високоточного вимірювання її елементів та реконструкції форм тривимірних поверхонь з використанням стерео- і багатокамерної зйомки, а також спеціального структурованого освітлення.

У галузі комп'ютерного зору можна виділити такі етапи обробки даних:

- попередня обробка зображень з метою усунення чи зменшення спотворень, обумовлених сенсорами та шумом;
- сегментація зображень за певним критерієм;

- виділення геометричної структури зображення та сцени, що подана на зображенні;
- визначення відносної структури і семантики за зображенням сцени.

Пов'язані з цими етапами рівні обробки зазвичай називають відповідно обробкою нижнього рівня, обробкою середнього рівня та обробкою високого рівня. Якщо алгоритми обробки нижнього рівня (фільтрація простих шумів, гістограмна обробка) можуть розглядатися як добре опрацьовані і детально вивчені, то алгоритми середнього рівня (сегментація) залишаються центральним полем докладання інженерних і дослідницьких зусиль. За останні роки значний прогрес був досягнутий в задачах зіставлення та узгодження точок і фрагментів зображень (matching), виділення ознак всередині малих фрагментів, досягнення високої точності 3D-позиціювання точок шляхом відповідного моделювання та калібрування датчиків і їх комбінацій, виділення простих яскравісно-геометричних структур типу «точка», «край», «пляма», «пряма лінія», «кут».

Методи обробки високого рівня призначені для розв'язку задач «розуміння зображень» і потребують використання методів штучного інтелекту. Безумовно, перспектива створення майбутніх поколінь «інтелектуальних машин» здебільшого залежить від подальшої розробки саме цього кола алгоритмів.

До методів (алгоритмів) комп'ютерного зору звичайно висувають такі основні вимоги: 1) робастність; 2) точність; 3) обчислювальна реалізованість.

Робастність означає стійкість методу чи алгоритму до суттєвих спотворень даних та, зокрема, до «забрудненого» шуму. Алгоритми, що вирішують прикладні задачі комп'ютерного зору, повинні працювати в умовах, коли можливі різні види шумів та непередбачуваних перешкод. Основні чинники та фактори спотворень є такими [1]:

1) перешкоди і шум мають багато джерел виникнення, до яких можна віднести недосконалість сенсорів приймально-передавальної апаратури та апаратури оцифровування зображень, важкі умови зйомки, нестача освітлення, тощо;

2) складний текстурований фон, на якому має відбуватися виявлення об'єктів, наприклад, виявлення штрихової наклейки на схожій з нею за структурою газетній сторінці і т.ін.;

3) ефекти загороджування одних об'єктів іншими об'єктами, як правило, з невизначеною заздалегідь формою, наприклад, хмара на космофотознімку й т.п.;

4) спотворюючі оптичні ефекти у вигляді різних розфокусувань, дисторсій об'єктивів, ракурсних спотворень і ін.;

5) ефекти різкої зміни освітлення, відблиски, тіні, особливо в динамічно мінливих сценах;

6) різноманітність і змінність самих об'єктів, що призводить до змінної структури зображень (текстові рядки, автомобільні номери, штрихові коди),

7) наявність дефектів та тимчасових змін форми об'єктів (згинання-розгинання кінцівок, рух механічних частин машин);

8) зміна середовища розповсюдження світла між сенсорами і об'єктами спостереження (дим, атмосферні опади, пил, штучні перешкоди, тощо);

9) несинхронність реєстрації та обробки даних у динамічних задачах, яка пов'язана з обмеженнями швидкодії комп'ютерних засобів зберігання та аналізу зображень, що є особливо критичним для промислових додатків із заданим часом реакції на подію. Сюди можна віднести також збої в комп'ютерних програмах обробки.

Зауважимо, що навіть поверхневий аналіз наведених факторів свідчить про практичну неможливість їх повного формального математичного опису, а саме імовірнісного, радіометричного або геометричного [1].

Відсутність формалізованого опису тих ключових факторів, що вносять невизначеність у процес обробки, призводить до того, що, на відміну від багатьох інших областей обробки сигналів, практично неможливо говорити про існування єдиного оптимального алгоритму для вирішення тієї чи іншої задачі обробки зображень. Так, наприклад, тільки для задачі сегментації графіки і тексту на цифрових зображеннях документів було придумано сотні принципово різних алгоритмів. Уявімо собі, що існує кілька алгоритмів, що досягають приблизно однакових результатів на «ідеальних» зображеннях. Тоді виникає природне запитання: як порівняти ці алгоритми за якістю їх роботи?

На даний час стандарт «де факто» для розробки реальних алгоритмів полягає у перевірці ефективності роботи сконструйованих

алгоритмів на великих вибірках реальних даних або зображеннях, що містять усі неприємні ситуації. Такі алгоритми, які мають стійкість до значних спотворень і змінних факторів, прийнято називати стійкими, або робастними. Робастність слід вважати першою основною практичною вимогою при розробці алгоритмів комп'ютерного зору.

Другу найважливішу властивість, якою повинні, як правило, володіти алгоритми виявлення об'єктів на зображеннях, можна визначити як точну локалізацію об'єктів, що підлягають виявленню, або контурів об'єктів, які підлягають виміру. Це означає, що необхідно не просто виділити об'єкт, але і точно вказати в системі координат зображення (або сцени) його положення і розміри. Трохи неясне тлумачення «локалізації», що подано вище, пов'язане з тим, що в порівнянні зі своєю еталонною моделлю об'єкт може бути помітно спотворений геометрично, причому аналітична модель спотворення може бути відсутня. Характерні приклади – штриховий код, що знаходиться на зім'ятій упаковці, пляма на шкірі і т. ін. У цих випадках локалізація об'єкта є нетривіальним завданням. У більш простій ситуації аналітично заданої з точністю до параметрів геометрії спотворень під точною локалізацією можна розуміти знання про розташування якої-небудь характерної точки об'єкта і параметри геометрії спотворення (поворот, афінні коефіцієнти, вигини та ін.). При цьому випадки помилок локалізації, що зустрічаються, доцільно розділити на дві групи – нормальні і аномальні помилки.

Нормальна помилка – це правильна локалізація об'єкта з деякою позиційною або параметричною неточністю, яка характеризується кількісними оцінками. Для об'єктів, які характеризуються габаритними розмірами, більшими ніж $(3 \times 3) \div (5 \times 5)$ елементів зображення, позиційні нормальні помилки можуть бути значно меншими за розмір елемента зображення, зменшуючись з величиною об'єкта. У цьому випадку прийнято говорити про субпіксельну локалізацію, або субпіксельні виміри. Це особливо важливо для задач стереовиявлення, так як при малих паралаксах 3D-об'єктів субпіксельна прив'язка найістотнішим чином визначає точність вимірювання їх просторового положення.

Зауважимо також, що вимоги по точності пред'являються і до алгоритмів обробки зображень низького рівня. Наприклад, у багатьох

вимірювальних завданнях фільтри, що усувають перешкоди, не повинні при цьому істотно змінювати видиме положення контурів об'єкта. Вимога «збереження країв» або, в більш загальному вигляді, збереження незмінними вимірюваних характеристик корисного сигналу є принциповою вимогою «за точністю», що висувається до алгоритмів нижнього рівня, оскільки, якщо дані були «зіпсовані» вже на нижньому рівні обробки, то на більш високих рівнях аналізу ніякі найдосконаліші математичні методи допомоги не зможуть, і завдання в цілому не буде вирішене з необхідною точністю.

Важлива відмінність, яка притаманна процедурам обробки та аналізу зображень у порівнянні із задачами розпізнавання або інтерпретації вже сегментованого образу, полягає в тому, що виявлення і вимірювання параметрів об'єкта у практичних задачах завжди пов'язане із процедурою пошуку об'єкта. Саме реалізація процедури пошуку об'єкта пов'язана із загрозою лавиноподібного зростання потрібного числа обчислень. Проілюструємо це на прикладі простої задачі пошуку об'єкта на основі порівняння з растровим еталоном або шаблоном. Якщо побудувати який-небудь функціонал відповідності між об'єктом розміром $M \times M$ і фрагментом $M \times M$ із зображення $N \times N$, то просте перебирання фрагментів вимагає кількості обчислень не менше ніж $M^2 \times N^2$ операцій, що становить, наприклад, 10 мільярдів операцій при розмірі об'єкта 50×50 для зображення з 2000×2000 елементів [1]. Навіть зважаючи на значне збільшення можливостей сучасних комп'ютерів, такі обсяги обчислень займають секунди машинного часу, що далеко виходить за межі вимог систем виявлення реального часу, призначених для таких задач, як навігація і наведення, інспекційний контроль, обробка документів тощо.

Більш того, реальні задачі обробки візуальної інформації мають додаткові спотворення, коли шукана яскравісно-геометрична структура на зображенні може мати не тільки довільні положення, кутову орієнтацію і масштаб, але і піддаватися різним перетворенням, не тільки афінним або проєктивним, але і набагато більш складним, таким як різні «гумові» моделі або «викривлення» (warping – спотворення, що нагадує зім'ятий папір). Все це багаторазово збільшує потрібний для перебирання час розрахунків і вимагає застосування якісно нових ідей щодо організації процесу аналізу зображення.

Оцінюючи розмір зображення, призначеного для обробки, наприклад, як 1000x1000 елементів, можна отримати, що навіть для найпростіших операцій необхідна кількість потрібних обчислень становить декілька Гігафлоп операцій на кадр. Якщо додатком реального часу необхідно виконувати ці обчислення в темпі кадрової розгортки, то це призводить до оцінки потрібної швидкодії близько 50 Gflop/sec. Хоча ці оцінки не є позамежними для потужних сучасних комп'ютерів, але слід врахувати, що основні застосування комп'ютерного зору знаходяться в тих галузях діяльності, де масогабаритні й вартісні характеристики пристроїв є обмеженими і повинні бути невеликими.

5.1. Основи стереоскопічних вимірювань

Одним із перспективних напрямків у галузі інформаційних технологій є розвиток комп'ютерного зору. Останнім часом технології комп'ютерного зору швидко розвиваються, що обумовлено як поліпшенням можливостей камер і зменшенням їх вартості, так і збільшенням доступних обчислювальних потужностей для обробки зображень. Комп'ютерний зір можна застосовувати практично в усіх сферах життя людини. Одним з його актуальних напрямків стала стереоскопія, коли використання двох зображень, отриманих з різних ракурсів, дозволяє отримати ефект «глибини зображення». Зокрема, однією з актуальних задач є розробка систем візуальної навігації, призначених для застосування у транспортних засобах, зокрема, в автомобілях. У такій системі на екран водія виводиться зображення дороги і об'єктів, що знаходяться на ній. Для кожного об'єкта вказується відстань до нього і його лінійні розміри. Для об'єктів, які знаходяться на дорозі, може визначатися їх висота, і якщо вона буде вищою, ніж кліренс автомобіля, то водієві буде видано повідомлення про можливість зіткнення. При визначенні відстані до перешкоди система може подавати сигнал гальмівній системі автомобіля, і, при необхідності, буде включатися екстрена зупинка машини. Стереоскопічна система також може оцінювати дорожні знаки і факт наявності пішоходів на дорозі, тим самим іноді запобігаючи порушенню дорожніх правил водієм і зменшуючи кількість дорожньо-транспортних пригод.

Іншою областю застосування стереоскопічної системи можуть бути тифлотехнології (технології для сліпих). Наприклад, може бути створено деякий мобільний пристрій, який кріпиться до одягу або на голову людини. Під час руху сліпа людина отримує звукові сигнали від пристрою і орієнтується за ними, визначаючи, чи далеко від нього знаходиться об'єкт або перешкода.

Основними задачами, які вирішуються під час виконання стереоскопічних вимірювань, є отримання зображень від камер, пошук об'єкта, розрахунок відстані до об'єкта та оцінювання його лінійних розмірів. Для отримання зображень можна використовувати або спеціальні дволінзові стереокамери, або систему з двох об'єднаних камер. За допомогою двох таких зображень можна визначити відстань від камери до вибраного об'єкта, яка розраховується через зсув двох зображень цього об'єкта. Зазвичай на одному із зображень обираємо об'єкт, далі цей об'єкт за допомогою техніки розпізнавання образів знаходимо на іншому зображенні. Потім знаходимо піксельну різницю між зображеннями об'єктів з лівої та правої камер і, користуючись геометричними розрахунками, знаходимо відстань від камери до вибраного об'єкта. Стереоскопія дозволяє також визначити лінійні розміри обраного на зображенні об'єкта.

Для розрахунку відстані до об'єкта необхідно знати відстань між камерами. Крім цього, під час зйомки стереозображень необхідно, щоб камери знаходилися в одній горизонтальній площині, їх оптичні осі були паралельними, а також щоб зйомка проводилася одночасно з двох камер.

Стереоскопічна лабораторна система може бути реалізована на базі двох камер і комп'ютера. Наприклад, на рис. 5.1 подано фотографічне зображення такої системи, яка складається з двох веб-камер, що розташовані на відстані 17 см одна від одної, де горизонтальний кут огляду кожної камери дорівнює 53° , а оптичні осі камер є паралельними.

Розглянемо виведення основних співвідношень для визначення відстані до об'єкта, який реєструється обома камерами, та його лінійних розмірів.



Рис. 5.1. Стереоскопічна система

Зауважимо, що для будь-якої оптичної системи притаманним є розгляд двох площин, а саме площини об'єкта, де безпосередньо знаходиться об'єкт, та площини зображення, де безпосередньо формується зображення об'єкта та де виконується його реєстрація на фотоплівку чи ПЗС-матрицю. Для лінійної інваріантної до просторового зсуву системи розміри об'єкта в об'єктній площині є пропорційними до розмірів об'єкта у площині його зображення. В цьому випадку можна отримати прості геометричні співвідношення на основі наближення геометричної оптики та у припущенні, що зображення формується за допомогою камери-обскура. Але на відміну від камери-обскура, де формується інвертоване у просторі зображення і де площина зображення розташована поза отвором камери-обскура, будемо вважати, що площина зображення розташована перед отвором камери-обскура, і тому зображення не є інвертованим у просторі, а є таким, що спостерігається за допомогою звичайної веб-камери або фотоапарата (рис. 5.2).

Встановимо початок системи координат в центр лівої камери (рис. 5.2) та спрямуємо осі системи координат таким чином, щоб вісь OX була спрямована до центра правої камери, вісь OY була спрямована за оптичною оссю лівої камери, до якої повинна бути паралельною оптична вісь правої камери, а напрям осі OZ був спрямований вертикально вгору. Нехай лінія L_1 задає перетин вертикально розташованої площини об'єкта з площиною, в якій розташовані оптичні осі камер.

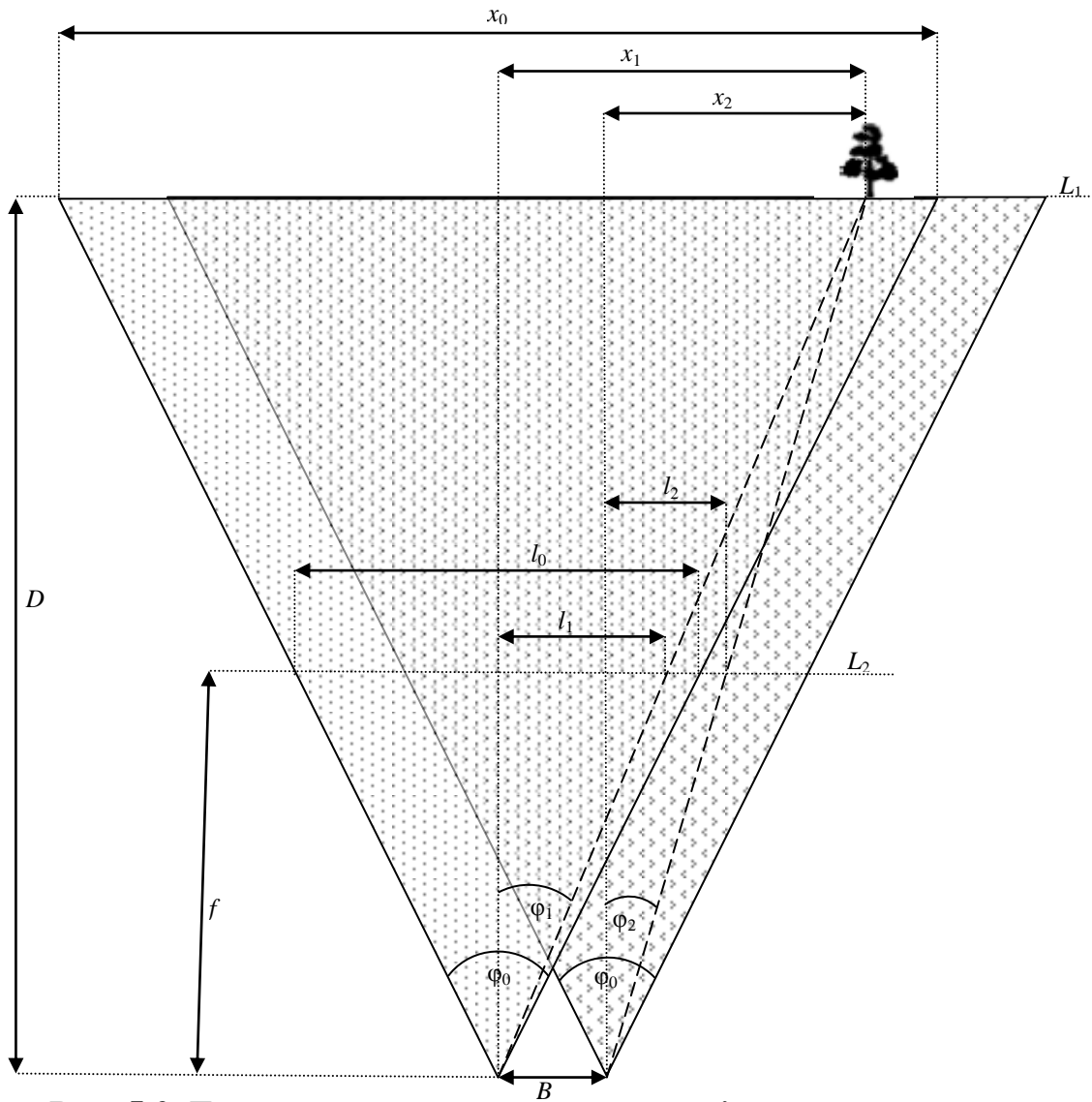


Рис. 5.2. Геометрична модель стереоскопічної системи

240 px

Тоді з геометричних відношень щодо об'єктної площини (лінія L_1) впливають відношення

$$\begin{aligned}
 x_1 &= D \operatorname{tg}(\varphi_1), \\
 x_2 &= D \operatorname{tg}(\varphi_2), \\
 x_1 - x_2 &= B = D[\operatorname{tg}(\varphi_1) - \operatorname{tg}(\varphi_2)]
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

де D – відстань до об'єктної площини.

З (5.1) отримуємо

$$D = \frac{B}{\operatorname{tg}(\varphi_1) - \operatorname{tg}(\varphi_2)} . \quad (5.2)$$

У площині зображення об'єкта (лінія L_2) маємо такі співвідношення

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{l_1}{f}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{l_2}{f}, \quad f = \frac{l_0}{2\operatorname{tg}(\frac{\varphi_0}{2})} . \quad (5.3)$$

З (5.3) отримуємо проміжні формули

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{l_1}{l_0} 2\operatorname{tg}(\frac{\varphi_0}{2}); \quad \operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{l_2}{l_0} 2\operatorname{tg}(\frac{\varphi_0}{2}) . \quad (5.4)$$

та, нарешті, кінцеву формулу

$$D = \frac{Bl_0}{(l_1 - l_2)2\operatorname{tg}(\frac{\varphi_0}{2})} . \quad (5.5)$$

У загальному випадку, розрахунок відстані до об'єктної площини можна виконати за такою формулою:

$$D = \frac{Bl_0}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)|l_1 - l_2|} , \quad (5.6)$$

де B – відстань між камерами, l_0 – ширина огляду вздовж осі Ox , а φ_0 – горизонтальний кут огляду камери, $|l_1 - l_2|$ – зсув між об'єктом на лівому і правому зображенні.

З урахуванням того, що $\varphi_0=53^\circ$ та перерахунку l_0 і $|l_1 - l_2|$ в пікселі (тобто $l_0 = p_0 \Delta x$; $l_1 = p_1 \Delta x$, $l_2 = p_2 \Delta x$, де Δx – крок дискретизації вздовж осі Ox), отримуємо формулу:

$$D = \frac{B * p_0}{|p_1 - p_2|} , \quad (5.7)$$

де $|p_1 - p_2|$ – зсув між зображеннями об'єкта в пікселях, p_0 – загальна кількість пікселів у рядку зображення.

Лінійні розміри протяжного об'єкта, який розташований симетрично щодо оптичної осі камери, можна наближено (без урахування орієнтації цього об'єкта у просторі) знайти за формулою:

$$l = D \cdot 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) , \quad (5.8)$$

де D – лінійна відстань до об'єктної площини, φ – кут огляду об'єкта камерою. Якщо ширина огляду камери дорівнює 320 пікселям, а об'єкт, що спостерігається, має в об'єктній площини умовний розмір m_x пікселів, то лінійний горизонтальний розмір об'єкта буде дорівнювати:

$$l_x = D \frac{m_x}{320} . \quad (5.9)$$

Вважаючи, що зображення є однорідним у будь-якому напрямку (горизонтальному і вертикальному), вертикальний розмір об'єкта буде визначатися за аналогічною формулою.

За допомогою комп'ютерного зору можна легко визначити орієнтацію певного протяжного об'єкта у просторі. Для цього необхідно отримати інформацію про просторові координати об'єкта чи його складових частин. Використовуючи далі відповідну модель, можна визначити параметри орієнтації об'єкта у просторі.

Інформацію про просторові координати можна отримати за допомогою стереозору, здійснюючи суміщення зображень для різних точок об'єкта і обчислюючи їх просторові координати. Далі обмежимося простим випадком, коли об'єкт (наприклад, олівець) описано відрізком прямої лінії та розташовано у площині, в якій лежать камери і цей відрізок (тобто коли один кінець олівця є ближчим до камер, ніж інший

кінець олівця). Для отримання мінімальної помилки щодо орієнтації цього відрізка у просторі, будемо використовувати координати тільки кінцевих точок відрізка, які позначимо (x_1, y_1) і (x_2, y_2) відповідно. Тоді з рівняння прямої лінії

$$y = ax + b \quad . \quad (5.10)$$

впливає, що коефіцієнт нахилу $a = \text{tg}(\alpha)$, який задає орієнтацію відрізка у просторі (рис. 5.3), визначається за формулою

$$a = \text{tg}(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (5.11)$$

де вісь y відповідає повздовжній координаті (тобто глибині), а вісь x відповідає поперечній (до оптичних осей камер) координаті. Очевидно, якщо $\alpha > 0$, то відрізок є нахиленим праворуч, а якщо $\alpha < 0$, то відрізок є нахиленим ліворуч відносно осі y . Також зрозуміло, що лінійний розмір цього об'єкта визначається за теоремою Піфагора, тобто

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (5.12)$$

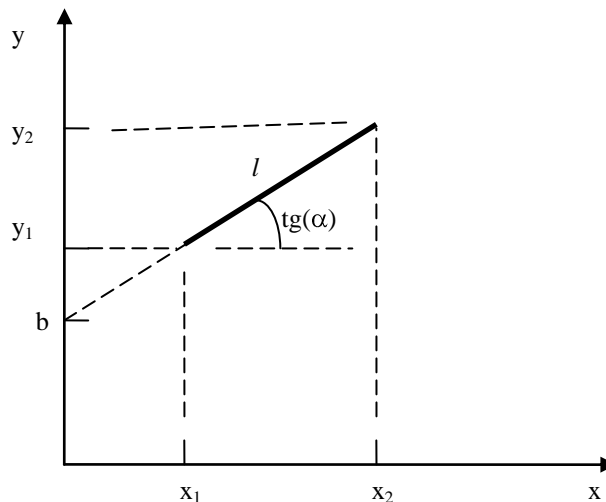


Рис. 5.3 Модель об'єкта у вигляді відрізка прямої лінії на площині

Зазначене легко узагальнити на випадок трьох просторових координат з визначенням просторової орієнтації через напрямні косинуси та з визначенням лінійних розмірів об'єкта через формулу, що є аналогічною до (5.12). Таким чином, за кінцевими точками відрізка прямої лінії можна легко визначити як орієнтацію, так і лінійні розміри об'єкта, який моделюється цим відрізком. Тому головною задачею для визначення орієнтації певного протяжного об'єкта у просторі є обчислення просторових координат об'єкта за зображеннями з двох камер (рис. 5.4).



Рис. 5.4. Приклад зображення об'єкта (аркуш паперу) з лівої та правої камер для визначення орієнтації

Розглянемо простий приклад обчислення координат об'єкта, який можна моделювати відрізком прямої лінії, щодо оптичної осі однієї з камер. Нехай методом комп'ютерного стереозору ми визначили, що «ближня» кінцева точка відрізка розташована на відстані $D_1 = 80$ см, а «віддалена» кінцева точка відрізка розташована на відстані $D_2 = 100$ см.

Нехай за поперечною (горизонтальною) координатою знімка «ближня» кінцева точка відрізка розташована в пікселі номер 400, оптична вісь камери відповідає пікселю номер 320, а всього вздовж горизонталі є 640 пікселів. Тоді «ближня» кінцева точка знаходиться від оптичної осі камери на відстані $l_1 = (400 - 320) \frac{D_1}{640} = 80 \frac{80}{640} = 10$ см.

Нехай за поперечною координатою знімка «віддалена» кінцева

точка відрізка розташована в пікселі номер 340. Тоді «віддалена» кінцева точка знаходиться від оптичної осі камери на відстані $l_2 = (340 - 320) \frac{D_2}{640} = 20 \frac{100}{640} \approx 3$ см. Таким чином, координати «ближньої» і «віддаленої» кінцевих точок відрізка, записані в сантиметрах, є (10, 80) та (3, 100) відповідно. Звідси отримуємо, що лінійний розмір (довжина) відрізка дорівнює $l \approx 22$ см, а орієнтація визначається кутом щодо осі x , тангенс якого дорівнює $tg(\alpha) = \frac{20}{-7} \approx -3$.

Використання обчислень щодо другої камери дозволяє трохи уточнити ці результати.

5.2. Програмна реалізація стереоскопічних вимірювань

Для реалізації програмного забезпечення стереоскопічної системи може бути використано середовище MATLAB і такий алгоритм.

1. За допомогою функції `videoinput` виконуємо зняття даних і записуємо отримані зображення у файл (рис. 5.5).

```
vid1 = videoinput('winvideo',1,'RGB24_320x240');
vid2 = videoinput('winvideo',2,'RGB24_320x240');

preview(vid1);
h = getsnapshot(vid1);
imwrite(h, strcat('imL21.png'));

preview(vid2);
h = getsnapshot(vid2);
imwrite(h, strcat('imR21.png'));
```

Рис. 5.5. Отримання зображень з камер

2. Вказуємо координати об'єкта на зображенні, до якого будемо знаходити відстань.
3. Задаємо відстань між камерами.
4. Кольорове зображення перетворюємо в напівтонове (рис. 5.6).

```

%% початкові установки
imLeft = 'imL21.png'; % зображення з лівої камери
imRight = 'imR21.png'; % зображення з правої камери
%координати об'єкта на зображенні, до якого знаходимо відстань
xCoord1 = 230; % абсциса верхнього лівого кута прямокутної області
yCoord1 = 130; % ордината верхнього лівого кута прямокутної області
xCoord2 = 279; % абсциса нижнього правого кута прямокутної області
yCoord2 = 220; % ордината нижнього правого кута прямокутної області
camerasDistance = 170; % відстань між камерами (у міліметрах)
camera
Angle =53; % горизонтальний кут огляду камери (в градусах)
%% підготовка зображень
% зчитуємо зображення
I1 = imread(imLeft);
I2 = imread(imRight);
% якщо зображення кольорове, то перетворюємо у напівтонове
if ndims(I1) == 3
I1 = rgb2gray(I1);
end
if ndims(I2) == 3
I2= rgb2gray(I2);
end
figure, subplot(2,1,1), imshow(I1)
title('Напівтонове зображення з лівої камери')
figure,subplot(2,1,2), imshow(I2)
title('Напівтонове зображення з правої камери')
% знаходимо розміри зображення
[imSizeY, imSizeX] = size (I1);

```

Рис. 5.6. Зчитування та перетворення зображення в напівтонове

5. Знаходимо розміри зображення.
6. Обробляємо область і задаємо шаблон об'єкта для обробки.
7. Знаходимо координати центра шаблону на лівому і правому зображеннях.
8. Розраховуємо відстань у пікселях (за горизонталлю) між центрами шаблонів на лівому і правому зображеннях (рис. 5.7).

```

% знаходимо розміри зображення
[imSizeY, imSizeX] = size(I1);
%% обробка області
templateMatcher = vision.TemplateMatcher;
templateMarker = vision.MarkerInserter('Size', 2, 'Fill', true, 'FillColor', 'Black', 'Opacity', 1);

% задаємо шаблон об'єкта для обробки
template = I1(yCoord1:yCoord2, xCoord1:xCoord2);

loc1 = [idivide(int32(xCoord1 + xCoord2), 2), idivide(int32(yCoord1 + yCoord2), 2)];
% знаходимо координати центра шаблону на лівому зображенні

loc2 = step(templateMatcher, I2, template); % знаходимо координати центра шаблону
на правому зображенні
pixelDistance = abs(loc1(1) - loc2(1)); % вираховуємо відстань у пікселях по
горизонталі між центрами шаблонів на лівому та правому зображеннях

if loc1(2) ~= loc2(2)
    disp('УВАГА! На стереозображенні присутній вертикальний зсув. Підрахунок
відстані може бути невірним!')
end

stereo = imfuse(I1, I2, 'ColorChannels', [1 0 2]); % формування стереозображення

```

Рис. 5.7. Завдання шаблону об'єкта

9. Формуємо стереозображення (здіємо червоний канал для лівої камери і синій для правої).
10. Наносимо маркери на стереозображення.
11. Розраховуємо відстань до об'єктної площини (рис. 5.8).

```

% задіємо червоний канал для лівого зображення та блакитний для правого
%схема [R G B], 0 - канал не задіємо, 1 - задіємо канал для лівого зображення,
%2 - задіємо канал для правого зображення
% нанесення маркерів на стереозображення
stereo = step(templateMarker, stereo, loc1);
stereo = step(templateMarker, stereo, loc2);
figure, imshow(template), title('Шаблон')
figure, imshow(stereo), title('Червоно-блакитний композитний вид стереозображення')
%% підрахунок відстані
cameraAngle = cameraAngle*pi/180; % перетворення кута в градусах у радіани
% підрахунок відстані до об'єкта
estimatedDistance = camerasDistance*imSizeX/(2*tan(cameraAngle/2)*pixelDistance);
% підрахунок похибки
errorDistance=
estimatedDistanceA2*tan(cameraAngle/double(imSizeX))/camerasDistance;
disp(['РозраховаНа дистанція (у міліметрах):' num2str(estimatedDistance)])
disp(['ПохибКа розрахунку (у міліметрах):' num2str(errorDistance, 4)])
%% збереження зображень
imwrite(I1, strcat(imLeft(1:strfind(imLeft, '.')-1), 'grscl', '.png'), 'png')
imwrite(I2, strcat(imRight(1:strfind(imRight, '.')-1), 'grscl', '.png'), 'png')

```

Рис. 5.8. Розрахунок лінійної відстані до об'єктної площини

У результаті виконання програми користувач отримає повідомлення, наведене на рис. 5.9.

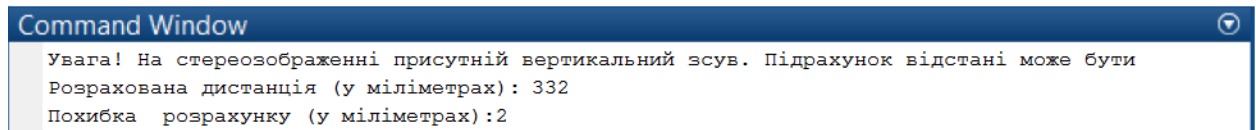


Рис. 5.9. Результат виконання програми

Контрольні питання

1. Які завдання вирішують комп'ютерний зір, машинний зір та зір роботів?
2. Що є предметом цифрової фотограмметрії?
3. Що означає поняття «робастність методу обробки»?
4. Які проблеми вирішують у галузі тифлотехнологій?
5. Яку будову має стереоскопічна система?
6. Наведіть малюнок з геометричною моделлю стереоскопічної системи, де об'єкт розташований ліворуч від оптичної осі лівої камери.
7. Як обчислити відстані до об'єктної площини, де спостерігається об'єкт?
8. Яку перевагу надає горизонтальний кут огляду простору в 53 градуси?
9. Яким чином можна обчислити розміри об'єкта?
10. Наведіть формулу розрахунку відстані від камер до об'єктної площини, якщо об'єкт розташований ліворуч від оптичної осі лівої камери.
11. Наведіть формулу розрахунку відстані від камер до об'єктної площини, якщо об'єкт розташований поміж оптичними осями камер.
12. Наведіть формулу розрахунку відстані від лівої камери до об'єкта, якщо об'єкт розташований ліворуч від оптичної осі лівої камери.

13. Наведіть формулу розрахунку відстані від правої камери до об'єкта, якщо об'єкт розташований ліворуч від оптичної осі лівої камери.
14. Які наслідки має збільшення роздільної здатності камер?
15. Які умови висувають до налаштування стереоскопічної системи?
16. Чи надає принципові переваги уведення в систему ще однієї чи двох або трьох камер?
17. Які недоліки та переваги має уведення в систему ще декількох камер?
18. До чого призводить збільшення відстані між камерами?
19. Чи дорівнюють один одному горизонтальний та вертикальний кути огляду звичайної web-камери?
20. Якою є похибка визначення відстані від камер до об'єктної площини?
21. Якою є похибка визначення лінійних розмірів об'єкта?
22. Як визначити орієнтацію об'єкта у просторі?
23. Як визначити лінійні розміри протяжного об'єкта з урахуванням його орієнтації у просторі?

Лабораторна робота № 5

Тема: *Комп'ютерний стереозір*

Мета: Вивчення методів комп'ютерного стереозору для візуального визначення відстані до об'єктів, оцінювання їх геометричних розмірів та орієнтації у просторі.

Завдання до лабораторної роботи. Лабораторна робота містить 4 типові завдання. Для виконання лабораторної роботи необхідно виконати зазначений викладачем варіант завдання, пов'язаний з розташуванням певних об'єктів у просторі та виконанням стереоскопічних вимірювань. Далі необхідно представити короткий звіт і захистити отримані результати. Звіт оформлюється друкованим способом з ілюстраціями отриманих зображень і повинен містити *тільки результати* виконання завдань.

Завдання 1. Суміщення зображень зі стереопари.

1. Отримати зображення з лівої та правої камер та виконати суміщення цих зображень для певного об'єкта, що спостерігається на обох зображеннях.
2. Визначити горизонтальний зсув отриманих зображень об'єкта в пікселях.

Завдання 2. Визначення відстані до об'єктів.

Визначити відстань до об'єктів, що спостерігаються на обох зображеннях, на основі формули (5.7) та виконати вимірювання відповідної відстані за допомогою лінійки. Зіставити отримані результати та обчислити похибку вимірювань.

Завдання 3. Оцінювання геометричних розмірів об'єктів.

Визначити геометричні розміри об'єктів, що спостерігаються на обох зображеннях, на основі формул (5.9) та виконати вимірювання відповідних геометричних розмірів за допомогою лінійки. Зіставити отримані результати та обчислити похибку вимірювань.

Завдання 4. Оцінювання просторової орієнтації плоских протяжних об'єктів.

Визначити кути нахилу плоского протяжного об'єкта (наприклад, книги) у просторі відносно оптичної системи (стереопари). Для цього спочатку узагальнити формули (5.10)–(5.12) на випадок тривимірного простору, потім з отриманих зображень лівої та правої камер обчислити просторові координати будь-яких трьох кінцевих точок об'єкта та обчислити значення трьох напрямних косинусів через відстані до цих кінцевих точок. Зі значень трьох напрямних косинусів отримати значення трьох просторових кутів. Далі виконати геометричне вимірювання відповідних кутів та зіставити результати, обчислюючи похибку.

Література

1. Визильтер Ю.В. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения: курс лекций и практических занятий / Ю.В.Визильтер, С.Ю. Желтов, А.В. Бондаренко, М.В. Ососков, А.В. Моржин. – М. : Физматкнига, 2010. – 672 с.
2. Форсайт Д. А. Компьютерное зрение. Современный подход / Д.А. Форсайт, Ж. Понс. – М. : Изд. «Вильямс», 2004. – 928 с.
3. Хорн Б.К.П. Зрение роботов / Б.К.П. Хорн, пер. с англ. – М. : Мир, 1989. – 487 с.
4. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн. 1. – 312 с.
5. Прэтт У. Цифровая обработка изображений / У. Прэтт; пер. с англ.; под ред. Д.С. Лебедева. – М. : Мир, 1982. – Кн. 2. – 480 с.

Додаток 5.1

Фрагмент MatLab-тексту програми для завдання.

```
%Lab5 ---> Computer Vision
clear all;
close all;

vid1 = videoinput('winvideo',1,'RGB24_320x240');
vid2 = videoinput('winvideo',2,'RGB24_320x240');

preview(vid1);
h = getsnapshot(vid1);
imwrite(h, strcat('leftCam.bmp'));
data1 = mat2gray(rgb2gray(h));
figure, subplot(2,1,1), imshow(data1), hold;

preview(vid2);
h = getsnapshot(vid2);
imwrite(h, strcat('rightCam.bmp'));
data2 = mat2gray(rgb2gray(h));
subplot(2,1,2), imshow(data2);

imMarker = zeros(YSIZE, XSIZE);
imMarker(205,282)=1;
figure, imshow(data1+imMarker);
```



Зображення лівої камери



Зображення правої камери

Рис. 5.10. Результат виконання програми

Темплан 2016, поз.11

Навчальне видання

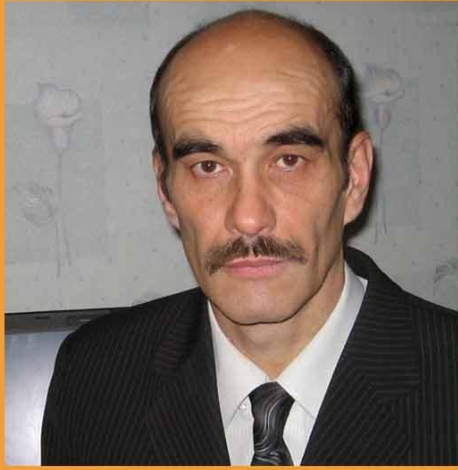
Вовк Сергій Михайлович
Гнатушенко Володимир Володимирович
Бондаренко Максим Васильович

МЕТОДИ ОБРОБКИ ЗОБРАЖЕНЬ ТА КОМП'ЮТЕРНИЙ ЗІР

Навчальний посібник

Підписано до друку 23.05.2016. Формат 60x84 1/16.
Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк. арк. 8,6.
Тираж 100 пр. Зам. N 99.

Друкарня "ЛІРА ЛТД"
вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050.
Свідоцтво про внесення до Держреєстру ДК № 188 від 19.09.2000



Вовк Сергій Михайлович - кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації, факультет фізики, електроніки та комп'ютерних систем, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Наукові інтереси: обробка сигналів та зображень, інформаційні технології, математичне та комп'ютерне моделювання процесів та систем



Гнатушенко Володимир Володимирович - доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизованих систем обробки інформації, факультет фізики, електроніки та комп'ютерних систем, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Наукові інтереси: інформаційні технології і телекомунікації, математичне та комп'ютерне моделювання процесів та систем, обробка та аналіз багатоканальних даних



Бондаренко Максим Васильович - кандидат технічних наук, доцент кафедри автоматизованих систем обробки інформації, факультет фізики, електроніки та комп'ютерних систем, Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

Наукові інтереси: математичне та комп'ютерне моделювання процесів та систем, обробка багатоканальних даних

ISBN 978-966-383-699-7



9 789663 836997 >